தமிழ் வெளியீட்டுக் கழக வரிசை எண்—124

# தொகை நுண்கணிதம்

## (INTEGRAL CALCULUS)

இ. கோவிந்தராசன், M.A., L.T.,
கணிதப் பேராசிரியர்,
அரசினர் கல்லூரி, சேலம்.

தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்
தமிழ்நாடு – அரசாங்கம்

First Edition—March 1966

B.T.P. No. 125.



**INTEGRAL CALCULUS**

T. GOVINDARAJAN.

**Price Rs. 9.**

*Printed by:*

DIRECTOR OF STATIONERY AND PRINTING, MADRAS.

# அணிந்துரை

(திரு. எம். பக்தவத்ஸலம், தமிழக முதலமைச்சர்)



தமிழைக் கல்லூரிக் கல்வி மொழியாக ஆக்கி ஆறு ஆண்டுகள் ஆகிவிட்டன. குறிப்பிட்ட சில கல்லூரிகளில் பி.ஏ. - வகுப்பு மாணவர்கள் தங்கள் பாடங்கள் அனைத்தையும் தமிழிலேயே கற்று வருகின்றனர். தொடக்கத்தில் இருந்த இடர்ப்பாடுகள் மெல்ல மெல்ல மறைந்து வருகின்றன. நாடு முழுதும் பரந்துள்ள மாணவர்களின் ஆர்வம், 'தமிழி லேயே கற்பிப்போம்' என முன்வந்துள்ள கல்வி ஆசிரியர் களின் ஊக்கம், பிற பல துறைகளிலும் தொண்டு செய்வோர் இதற்கெனத் தந்த உழைப்பு, தங்கள் சிறப்புத் துறைகளில் நூல்கள் எழுதித்தர முன்வந்த நூலாசிரியர்கள் தொண்டு ணர்ச்சி, இவற்றின் காரணமாக இத் திட்டம் நம்மிடையே திருப்திகரமாக நடைபெற்றுவருகிறது.

பல துறைகளில் பணி புரியும் பேராசிரியர்கள் எத்தனையோ நெருக்கடிகளுக்கிடையே குறுகிய காலத்தில் அரிய முறையில் நூல்கள் எழுதித் தந்துள்ளனர்.

வரலாறு, அரசியல், உளவியல், பொருளாதாரம், புவியியல், வேதியியல், உயிரியல், வானியல், புள்ளியியல், தத்துவம், ஆகிய பல துறைகளில் தனி நூல்கள், மொழி பெயர்ப்பு நூல்கள் என்ற இருவகையிலும் தமிழ் வெளி யீட்டுக் கழகம் நூல்களை வெளியிட்டுவருகிறது.

இவற்றுள் ஒன்றான 'தொகை நுண்கணிதம்' என்ற இந் நூல் தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகத்தின் 124 ஆவது வெளியீடாகும். கல்லூரித் தமிழ்க் குழுவின் சார்பில் வெளி யான 35 நூல்களையும் சேர்த்து இதுவரை 159 நூல்கள் வெளிவந்துள்ளன.

கணக்கிலடங்காத் தடைகளை எல்லாம் அகற்றித் தமிழன்னை கல்லூரிக் கலையாசனத்தில் அமர்ந்துள்ளாள். எனவே, இவ்வன்னையை வாழ்த்துவோமாக. உழைப்பின் வாரா உறுதிகள் இல்லை ; ஆதலின், உழைத்து வெற்றி காண்போம். தமிழைப் பயிலும் மாணவர்கள் உலக மாணவர்களிடையே சிறந்த இடம் பெறவேண்டும் ; அதுவே தமிழன்னையின் குறிக்கோளுமாகும். சென்னைப் பல்கலைக் கழகத்தின் பல வகை உதவிகளுக்கும் ஒத்துழைப்புக்கும் நம் மனம் கலந்த நன்றி உரித்தாகுக.

எம். பக்தவத்ஸலம்.

# பொருளடக்கம்

# தமிழ் வெளியீட்டுக் கழகம்

## சென்னை-9.

## 1965 வரை வெளியிட்டுள்ள நூல்கள்

பொருளாதாரம்

| | | | ரூ. | பை. |
|---|---|---|---|---|
| *1. | பொருளாதாரம்-II | சி. வேலாயுதம் | 9 | 00 |
| 2. | புதுமைப் பொருளாதாரக் கூறுகள் | திருமதி ஆர். தாமரஜாட்சி | 12 | 00 |
| 3. | பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்-I | தி. சி. மோகன் | 12 | 05 |
| 4. | பொருளாதாரம்—ஓர் அறிமுகம்-II | எம். ஏ. அபூர்வசாமி, பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன். | 10 | 70 |
| 5. | பொருளாதாரக் கோட்பாடு வளர்ந்த வரலாறு | க. முத்தையன் | 7 | 00 |
| *6. | பணவியலும் பாங்கியலும்-II | சி. வேலாயுதம் | 11 | 50 |
| 7. | நவீன பாங்கு இயல் | க. வெற்றிவேல் | 7 | 50 |
| *8. | இந்தியச் செலாவணியும் பாங்கு முறையும் | பி. வி. ஸ்ரீநிவாசன் | 5 | 50 |
| *9. | அரசாங்க நிதி இயல் | அர. சேஷாசலம் | 4 | 75 |
| 10. | இந்தியப் பொருளியல்-I | எம். பாலசுப்பிரமணியன் | 10 | 00 |
| 11. | இந்தியப் பொருளியல்-II | எம். லூர்துநாதன் | 4 | 25 |
| 12. | நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை-I | சி. சுந்தரராஜன் | 10 | 75 |
| 13. | நமது பொருளாதாரப் பிரச்சினை-II | எஸ். குழந்தைநாதன் | 10 | 50 |
| 14. | இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு-I | கீ. சீ. இராமசாமி | 6 | 00 |
| 15. | இங்கிலாந்தின் பொருளாதார வரலாறு-II | ,, | 6 | 00 |
| 16. | அமெரிக்காவின் நவீன பொருளாதார வளர்ச்சி | தி. சி. மோகன் | 5 | 00 |

* மூலநூல் (Original book).

| | | | ரூ. | பை. |
|---|---|---|---|---|
| 17. | அமெரிக்கப் பொருளாதார வரலாறு-I | மு. க. சுப்பிரமணியம் | 11 | 00 |
| 18. | அரசாங்க நிதியியலின் பொருளாதாரம்-I | மா. குமாரசாமி | 10 | 00 |
| 19. | இந்தியாவின் பொருளாதார வளர்ச்சி-I | தே. வேலப்பன் | 10 | 00 |
| 20. | பணம்—சிறு விளக்கம் | கோ. இராதாகிருஷ்ணன் | 10 | 00 |
| *21. | வணிக இயலின் தத்துவங்கள் | கு. ஆளுடைய பிள்ளை | 9 | 50 |
| 22. | பத்தொன்பதாம் நூற்றுண்டில் கிரேட் பிரிட்டனில் தொழில், வாணிபப் புரட்சி | கூ. ரா. கறுப்பண்ணன் | 11 | 00 |

வரலாறு

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *23. | பிரிட்டன் வரலாறு-I | கி. ர. அனுமந்தன் | 10 | 00 |
| 24. | பிரிட்டன் வரலாறு-II | ,, | 9 | 75 |
| *25. | ஐரோப்பிய வரலாறு-I | டி. வி. சொக்கப்பா | 4 | 50 |
| 26. | ஐரோப்பா—கடந்த ஐந்து நூற்றுண்டு காலச் சரித்திரம் | வை. விருத்தகிரீசன் | 15 | 00 |
| 27. | இங்கிலாந்து வரலாறு-I | இரா. அண்ணுமலை | 13 | 00 |
| 28. | இங்கிலாந்து வரலாறு-II | பா. மாணிக்கவேலு | 13 | 00 |
| 29. | இங்கிலாந்தின் வரலாறு-I | க. த. திருநாவுக்கரசு | 15 | 00 |
| 30. | இந்தியாவின் சிறப்பு வரலாறு-I | தி. வெ. குப்புசாமி | 7 | 50 |

அரசியல்

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *31. | இந்திய அரசியலமைப்பு | வீ. கண்ணையா | 4 | 70 |
| 32. | அரசியலுக்கு ஓர் அறிமுகம் | டி. செல்லப்பா | 8 | 50 |
| 33. | தற்கால அரசியல் அமைப்புகள் | மோ. வள்ளுவன் கிளாரன்சு | 8 | 50 |
| 34. | பன்னுட்டு அரசியல்-I | திருமதி நூர்ஜஹான்பாவா | 16 | 00 |
| 35. | பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்-I | வீ. கண்ணையா | 9 | 00 |
| 36. | பொதுத்துறை ஆட்சி இயல்-II | அ. ஜெகதீசன் | 7 | 25 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **உளவியல்** | | | |
| 37. குழந்தை உளவியல்-I | கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி | 8 | 00 |
| 38. குழந்தை உளவியல்-II | ,, | 7 | 00 |
| 39. உட்கவர் மனம் | சி. ந. வைத்தீஸ்வரன் | 7 | 00 |
| 40. இளையோர் உளவியல்-I | தி. இரா. அரங்கராசன் | 12 | 00 |
| 41. இளையோர் உளவியல்-II | ,, | 9 | 00 |
| 42. சமூக உளவியல் | என். வேதமணி மானுவேல் | 9 | 25 |
| 43. பிறழ்நிலை உளவியல் | அ. பெசன்ட் கிரீப்பர்ராஜ் | 11 | 00 |
| 44. பித்தரின் உள்ளம் | ,, | 3 | 00 |
| **தத்துவம்** | | | |
| 45. இந்து சமயத் தத்துவம் | ஞா. ராஜாபகதூர் | 5 | 50 |
| **அறவியல்** | | | |
| 46. அறவியல்—ஓர் அறிமுகம் | கோ. மோ. காந்தி | 8 | 50 |
| **அளவை யியல்** | | | |
| 47. அளவை இயல்-தொடக்க நூல் | கி. ர. அப்புள்ளாச்சாரி | 2 | 50 |
| **மானிடவியல்** | | | |
| *48. மானிடவியல் | ம. சு. கோபாலகிருஷ்ணன் | 4 | 75 |
| 49. பண்பாட்டுக் கோலங்கள் | கி. பூ. சுப்பிரமணியன் | 5 | 50 |
| **சமூகவியல்** | | | |
| 50. சமூகவியலின் அடிப்படைக் கோட்பாடுகள் | ஜெ. நாராயணன் | 10 | 00 |
| **புவியியல்** | | | |
| *51. ஆசியா-I | கொ. சேஷ. நரசிம்மன் | 9 | 50 |
| *52. ஆசியா-II | ,, | 8 | 75 |
| *53. ஐரோப்பாக் கண்டத்தின் புவியியல் | ஏ. எஸ். நாராயணன் | 8 | 50 |

* மூலநூல் (Original book).

| | | | ரூ. | பை. |
|---|---|---|---|---|
| *54. | வட அமெரிக்கா | குமாரி இரா. அலமேலு | 8 | 25 |
| *55. | தென் கண்டங்கள்-ஆஸ்திரேலியா | திருமதி எச். நியூமன் | 4 | 00 |
| *56. | புவிப் புறவியல்-II | நா. அனந்தபத்மநாபன் | 6 | 00 |
| *57. | செய்முறைப் புவியியல் | சு. ஜெயச்சந்திரன் | 9 | 00 |
| *58. | மக்கட் பரப்பியல் | வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன் | 6 | 25 |
| *59. | சமுத்திரவியல் | கோ. இராமசுவாமி | 6 | 50 |
| 60. | காலநிலை இயல்-I | கொ. சேஷ. நரசிம்மன் | 10 | 00 |
| 61. | வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம் | கோ. இராமசாமி | 11 | 00 |
| *62. | புவி அமைப்பு இயல் | சி. விசுவநாதன் | 4 | 75 |
| **புள்ளியியல்** | | | | |
| *63. | புள்ளியியல்-அறிமுகம் | சு. வைத்தியநாதன் | 10 | 00 |
| 64. | புள்ளியியல் முறைகள்-I | கோ. சண்முகசுந்தரம் | 10 | 00 |
| 65. | நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம் | தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன் | 6 | 50 |
| **விலங்கியல்** | | | | |
| *66. | விலங்கியல் | பெ. மா. அண்ணுமலை, இரா. முருகேசன் | 12 | 00 |
| **பௌதிகவியல்** | | | | |
| 67. | ஒளி நூல் | ச. சம்பத்து | 10 | 00 |
| **பொது நூல்கள்** | | | | |
| 68 | மகாத்மா காந்தி | சரஸ்வதிதங்கையன் | 3 | 25 |
| 69. | இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை | எஸ். இலட்சுமி | 3 | 50 |
| 70. | விவசாயப் புரட்சி | வி. கார்த்திகேயன் | 8 | 00 |
| 71. | சேமக் கை-நூல் | ஆ. சுப்பிரமணியன் | 2 | 50 |
| *72. | நீரிழிவு க்ஷயரோகம் | ஜி. வேங்கடசாமி, ஏ. கதிரேசன் | 2 | 50 |

* மூலநூல் (Original book).

1·4 இங்கு $\int f(x)\ dx = \mathrm{F}(x)$ எனக் கூறும்போது $f(x)$ தொகுக்கப்படும் சார்பெனவும், $\mathrm{F}(x)$ என்பது தொகையெனவும், $x$ தொகைக்குரிய மாறி (Variable) எனவுக் கூறப்படும்.[1]

1·41 C ஏதாமொரு மாறிலியெனவும்,

$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(x)\right] = f(x)$ எனவும், கொள்வோம். அப்போது வகைக்கெழு நியதிப்படி,

$\frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}\right]$ கூட $f(x)$க்குச் சமம். ஆகவே, C ஏதாமொரு மாறிலியானால்,

$\int f(x)\ dx = \mathrm{F}(x)+\mathrm{C}$ என்று கூறுவதும் வரையறைப்படி பொருத்தமாகும்.[2]

ஆகவே, Cக்கு எந்த மாறிலிமதிப்புக் கொடுத்தாலும், $\frac{d}{dx}\left[\mathrm{F}(x)+\mathrm{C}\right] = f(x)$ என்பது உண்மை. எனவே வரையறைப்படி,

(i) $\int f(x)\ dx = \mathrm{F}(x)$ — ஒரு தொகையாகும்.

(ii) $\int f(x)\ dx = \mathrm{F}(x) + \mathrm{C}$ என்பது தொகை அல்லது அளவுபடாத தொகை (Indefinite Integral) எனக் கூறப்படும்.

---

[1] குறிப்பு.—தொகை நுண்கணித இயலில் கண்டிப்பாகக் கூறுமிடத்து, $\mathrm{F}(x)$ என்பது $f(x)$ன் முதற் சார்பென்றே கூறவேண்டும். ஆனால், "தொகை" என்று கூறுவது ஒருமரபேயொழிய முற்றிலும் பொருத்தமானதல்ல. "முதற்சார்பு" (Primitive) என்பதற்கும் "தொகை" (Integral) என்பதற்கும் ஒரு வேறுபாடு உண்டு. இந்நூலைப் பொருத்தமட்டில், அவ்வேறுபாட்டை நாம் ஆழ்ந்து ஆராயப் போவதில்லை. "முதற்சார்பு" என்ற சொற்றொடரும், "தொகை" என்ற சொல்லும் ஏறக்குறையை ஒன்றையே குறிப்பதாகக் கொள்வோம்.

இதுவரை கூறப்பட்டதிலிருந்து $\frac{d}{dx}$ என்ற செயலியும் $\int$ என்ற செயலியும் ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ் மாற்றச் செயலிகளாக ஏற்றுக்கொள்ளப்படலாம். அதேபோல், $D$-ம், $D^{-1}$ ம் தலைகீழ் மாற்றச் செயலிகளாகின்றன.

## 1·5 தொகையில் தோன்றும் மாறிலி $C$:

(i) ஒவ்வொரு தொகைக்கும் ஏதாமொரு மாறிலி $C$ சேர்க்கப்படுவது, தொகைகாண் வரையறைக்கு உட்பட்டதாகும்.

(ii) சில குறிப்பிட்ட இடங்களில், அதற்குரிய விவரங்கள் கொடுக்கப்பட்டிருந்தால், $C$ என்ன என்று திட்டவட்டமாகக் கூறமுடியும்.

அந்த விவரங்கள் 'கட்டுப்பாடு' என்ற முறையில் அமைந்திருக்கும்.

(iii) சில கணக்குகளில் மேலெழுந்தவாரியாகப் பார்க்கும்போது, ஒரு சார்பின் தொகை காணுங்கால், இரண்டு வேறுபட்ட தொகைகள் கிடைப்பது போலத் தோன்றும்.

---

[2] குறிப்பு.— $(-2)^2$ என்பதற்கு ஒரே மதிப்பு 4; அதுபோல $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}$ என்பதும் ஒரே மதிப்பு. ஆனால் $\sqrt{4}$ என்பதற்கு 2, $-2$ என்ற இரு மதிப்புக்களும் பொருந்தும். அதேபோல், $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$ என்ற பல மதிப்புகளும் பொருந்தும்.

அவ்வாறே $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right]$க்கு $f(x)$ என்ற ஒரே ஒரு வகைக்கெழுதான் உண்டு. ஆனால், $\int f(x)\,dx$-க்கு எண்ணற்ற முதற் சார்புகள் உண்டு, அதாவது

$$\int f(x)\,dx=F(x)+ \text{ ஏதாமொரு மாறிலி}$$

எடுத்துக்காட்டாக,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1}x$$

என்ற இரண்டும் பொருத்தமானவையே. ஆனால், இதை யொட்டி, $\sin^{-1}x = -\cos^{-1}x$ என்ற துரித முடிவுக்கு வருதல் தவறாகும்.

1·51 உண்மையாக, நிலையென்னவெனில்,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1}x + A$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\cos^{-1}x + B$$

ஆனால், $A, B$ என்ற மாறிலிகளைத் தகுந்தபடி சரிக்கட்டினால்,

$$\sin^{-1}x + A = -\cos^{-1}x + B$$

என்பது பொருத்தமாக அமையும். ஏனெனில்,

$\sin^{-1}x + \cos^{-1}x = \frac{\pi}{2}$ என நாம் அறிவோம். ஆகவே,

$B-A=\frac{\pi}{2}$ எனச் சரிக் கட்டினால், $\sin^{-1}x + A = -\cos^{-1}x + B$ என்பது பொருத்தமாகும்.

பொதுவாக $\int f(x)\,dx = F(x) + C_1$ எனவும்

$\int f(x)\,dx = F(x) + C_2$ எனவும்

கூறலாம். இரண்டு தொகைகளுக்கும் உள்ள வேறுபாடு ஒரு மாறிலி.

1·6 **தொகையறிதல்.**—முதலில் கொடுத்த வரையறைப்படி, பின்னர் சில திட்ட அமைப்புகளைக் காண்போம். அதற்கு முன்பு, தொகைகாண் முறையை வகைக்கெழு காணும் முறையோடு இணைத்து, எப்படி ஒன்றுக்கொன்று தலைகீழ் மாற்றுமுறையென்பதைச் சில எடுத்துக்காட்டு கொண்டு விளக்குவோம். (வேண்டிய இடங்களில் $C$ என்ற

மாறிலியைத் தொகையோடு கூட்டிக் கொள்க).

1·61 (i) $$\frac{d}{dx}\left[\sin x\right] = \cos x$$

$$\therefore \int \cos x \, dx = \sin x.$$

(ii) $$\frac{d}{dx}\left[-\cos x\right] = \sin x$$

$$\therefore \int \sin x \, dx = -\cos x.$$

(iii) $$\frac{d}{dx}\left[\frac{x^{m+1}}{m+1}\right] = x^{m},$$

$$\therefore \int x^{m} dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} \quad (m \neq -1).$$

(iv) $$\frac{d}{dx}\left[\log_e x\right] = \frac{1}{x}$$

$$\therefore \int \frac{1}{x} \, dx = \log_e x$$

(v) $$\frac{d}{dx}\left[e^{x}\right] = e^{x}$$

$$\therefore \int e^{x} dx = e^{x}.$$

இவ்வாருக, நமக்குத் தெரிந்த வகைக்கெழுக்களைக் கொண்டு, ஒரு தொகைத்திட்ட அமைப்பை நிறுவலாம். அவைகளை வாய்பாடாகவும் கொள்ளலாம். அடுத்த பத்தியில் ஒரு சில கூறப்பட்டிருக்கின்றன.

**1·7 தொகை நுண் கணிதத்தில் உள்ள சில திட்ட அமைப்புகள் (அல்லது வாய்பாடுகள்).**—(வலது கைப்புறத்தில் C என்ற ஒரு மாறிலியைக் கூட்டிக் கொள்க. நூல் முழுவதிலுமே தொகை காணும் இடங்களில், வேண்டிய போதெல்லாம் C என்ற ஒரு மாறிலியைக் கூட்டிக் கொள்க.)

1. $$\int x^{n} dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \neq -1).$$

| | | | ரூ. | பை. |
|---|---|---|---|---|
| *54. | வட அமெரிக்கா | குமாரி இரா. அலமேலு | 8 | 25 |
| *55. | தென் கண்டங்கள்-ஆஸ்திரேலியா | திருமதி எச். நியூமன் | 4 | 00 |
| *56. | புவிப் புறவியல்-II | நா. அனந்தபத்மநாபன் | 6 | 00 |
| *57. | செய்முறைப் புவியியல் | சு. ஜெயச்சந்திரன் | 9 | 00 |
| *58. | மக்கட் பரப்பியல் | வி. எஸ். அனந்தபத்மநாபன் | 6 | 25 |
| *59. | சமுத்திரவியல் | கோ. இராமசுவாமி | 6 | 50 |
| 60. | காலநிலை இயல்-I | கொ. சேஷ. நரசிம்மன் | 10 | 00 |
| 61. | வளியியலுக்கு ஓர் அறிமுகம் | கோ. இராமசாமி | 11 | 00 |
| *62. | புவி அமைப்பு இயல் | சி. விசுவநாதன் | 4 | 75 |
| **புள்ளியியல்** | | | | |
| *63. | புள்ளியியல்-அறிமுகம் | சு. வைத்தியநாதன் | 10 | 00 |
| 64. | புள்ளியியல் முறைகள்-I | கோ. சண்முகசுந்தரம் | 10 | 00 |
| 65. | நம்மைச் சுற்றியுள்ள பேரண்டம் | தி. வி. லட்சுமிநரசிம்மன் | 6 | 50 |
| **விலங்கியல்** | | | | |
| *66. | விலங்கியல் | பெ. மா. அண்ணாமலை, இரா. முருகேசன் | 12 | 00 |
| **பௌதிகவியல்** | | | | |
| 67. | ஒளி நூல் | ச. சம்பத்து | 10 | 00 |
| **பொது நூல்கள்** | | | | |
| 68 | மகாத்மா காந்தி | சரஸ்வதிதங்கையன் | 3 | 25 |
| 69. | இந்தியாவில் குடியானவர் வாழ்க்கை | எஸ். இலட்சுமி | 3 | 50 |
| 70. | விவசாயப் புரட்சி | வி. கார்த்திகேயன் | 8 | 00 |
| 71. | சேமக் கை-நூல் | ஆ. சுப்பிரமணியன் | 2 | 50 |
| *72. | நீரிழிவு க்ஷயரோகம் | ஜி. வேங்கடசாமி, ஏ. கதிரேசன் | 2 | 50 |

* மூலநூல் (Original book).

பகுதி 1.

# தொகை காணல்

## [Integration]

1·1 வகை நுண்கணிதத்தின் தலைகீழ் மாற்று முறையே தொகை நுண்கணித முறையாகும்.

**1·2 தொகை நுண்கணிதத்தின் நோக்கம்.**

ஒரு சார்பின் வகைக் கெழு கொடுக்கப்பட்டிருக்கிறது. அதை வகைக் கெழுவாகக்கொண்ட முதற்சார்பு யாது எனக் கண்டுபிடிப்பதே தொகை நுண்கணிதத்தின் நோக்கமாகும். அதாவது, ஒரு சார்பின் வகைக் கெழு $f(x)$. $f(x)$ஐ வகைக் கெழுவாகக்கொண்ட முதற்சார்பு யாது எனக் காண்பதே தொகை நுண் கணிதத்தின் நோக்கமாகும்.

**1·3 வரையறை :** $\dfrac{d}{dx}\left[F(x)\right]=f(x)$ ஆனால், $F(x)$ என்பது $f(x)$ன் ஒரு தொகையாகும். அதை எழுதும் மரபு,

$$\int f(x)\,dx = F(x)$$

என்பதாம்.

எடுத்துக் காட்டாக,

$$\int \cos x\,dx=\sin x$$

$$\int e^x\,dx = e^x$$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \log_e x$$

2. $\int 1 . \, dx = x.$

3. $\int \frac{1}{x} \, dx = \log_e x$

4. $\int e^{x} \, dx = e^{x}.$

5. $\int \cos x \, dx = \sin x.$

6. $\int \sin x \, dx = - \cos x.$

7. $\int \sec^2 x \, dx = \tan x.$

8. $\int \operatorname{cosec}^2 x \, dx = - \cot x$

9. $\int \sec x \tan x \, dx = \sec x.$

10. $\int \operatorname{cosec} x \cot x \, dx = - \operatorname{cosec} x.$

11. $\int \cosh x \, dx = \sin h \, x.$

12. $\int \sin h \, x \, dx = \cosh x.$

13. $\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tan h \, x.$

14. $\int \operatorname{cosec} h^2 x \, dx = - \coth x.$

15. $\int \sec h \, x \tan h \, x \, dx = - \operatorname{sech} x.$

16. $\int \operatorname{cosec} h \, x \cot h \, x \, dx = - \operatorname{cosec} h \, x.$

17. $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \sin^{-1} x$ அல்லது $- \cos^{-1} x.$

18. $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \tan^{-1} x$ அல்லது $- \cot^{-1} x.$

19. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} = \sec^{-1} x$ அல்லது $-\operatorname{cosec}^{-1} x$.

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \sinh^{-1} x$.

21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \cosh^{-1} x$.

**1·71 மற்றும் சில தொகை வாய்பாடுகள்.**—இவை எளிதில் புலப்படக் கூடியவையாகும்.

1. $\frac{d}{dx}\left(Cx\right) = C$

$$\therefore \int C dx = Cx$$

2. $\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x)$ எனக் கொள்வோம். அப்போது,

$$\frac{d}{dx}\left[CF(x)\right] = Cf(x)$$

$$\therefore \int Cf(x)\,dx = C\,F(x)$$

$$= C\int f(x)\,dx.$$

அதாவது C என்ற மாறிலி ஒரு சார்பைப் பெருக்கி, $\int$ குறிக்குள் இருக்குமானல், அந்த $C$ ஐ $\int$ குறிக்கு வெளியே கொண்டு வரலாம்.

அதாவது $\int 4x^2\,dx = 4\int x^2 dx$

$$= 4\,\frac{x^3}{3}.$$

3. $\int \left[f(x) \pm \psi(x) \pm \phi(x)\right] dx = \int f(x)dx \pm \int \psi(x)dx \pm \int \phi(x)dx$

இது எளிதில் புலப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

(i) $\int (x^3-4x^2+\sec^2 x)\, dx = \int x^3 dx - 4 \int x^2 dx + \int \sec^2 x\, dx$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \tan x$$

(ii) $\int \cos^2 \left(\frac{x}{2}\right) dx = \int \frac{1+\cos x}{2}\, dx = \frac{1}{2} \int (1+\cos x) dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\, x + \sin x \,\right]$$

**1·8 வரையறுத்த தொகை :** (Definite Integral)

$\int f(x)\, dx = F(x) + C$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு $x=b$ என ஈடு செய்தல். $F(x)+C=F(b)+C$ (1)
அவ்வாறே $x=a$ என ஈடு செய்தால் $F(x)+C=F(a)+C$ (2)

$(1)-(2) = F(b)+C - F(a)-C = F(b)-F(a)$

இந்த மதிப்பை,

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ என்று குறிப்பிடுக.

இதுவே $\int f(x)dx$ க்கு, $a$ முதல் $b$ வரை, வரையறுத்த தொகையெனப்படும்.

இங்கு $a$ என்பது $x$-ன் கீழெல்லையென்றும், $b$ என்பது $x$-ன் மேலெல்லை யென்றும் கூறப்படும். (3)

எடுத்துக் காட்டு

(i) $\int_1^2 x^2 dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2$

$$= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3}$$

$$= \frac{7}{3}$$

---

(3) குறிப்பு.—வரையறுத்தத் தொகையைப்பற்றி பின்னர் விரிவாகக் காண்போம். இது ஒரு தற்காலிகமான விளக்கம்.

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \left[ \sin x \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \sin \frac{\pi}{2} - \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)$$
$$= 1 - (-1)$$
$$= 2$$

## பயிற்சிகள் 1

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$–ஒட்டியதொகை காண்க :

1. $\frac{3x-4x^3}{x^2}$
2. $\sqrt{x^n}$
3. $\frac{ax^2+bx+c}{x^n}\left(n > 3\right)$
4. $\frac{1-x-x^2}{x^4}$
5. $\cos^2 \frac{x}{2}$
6. $\sin^2 \frac{x}{2}$
7. $\frac{x-x^2}{\sqrt{x}}$
8. $\frac{x^{1/2}+x^{1/3}-x^{1/4}}{x}$
9. $\frac{\sqrt{x^5}+\sqrt{x^3}}{x}$
10. $\frac{a\sqrt{x}+b\sqrt{x^3}}{\sqrt{x^5}}$

பகுதி 2

# தொகை காணும் வழி-வகைகள்

2·1 வகைநுண்கணிதத்தில், வகைக்கெழு காண, பல விதிகளும் முறைகளும் கையாளப்பட்டன. அவ்வாறே, தொகைநுண்கணிதத்தில், தொகை காண பல விதிகளும் முறைகளும் உள்ளன. அவைகளைப் பாகுபடுத்திக் கூறுங்கால், அவை பொதுவாக நால்வகைப்படும்.

2·1.1 I. ஈடுசெய்து தொகை காணல் சார்பின் சார்பிற்கு வகைக்கெழு காணும் முறையோடு தொடர்புடையது; அதாவது $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$ (Substitution).

II. சினைகள் பிரித்துத் தொகை காணல் இரு சார்புகளின் பெருக்குச்சார்பிற்கு வகைக்கெழு காணும் முறையோடு தொடர்புடையது ; அதாவது

$$\frac{d}{dx}\left(uv\right) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$ (By Parts).

III. பகுத்துத் தொகை காணல் (Partial Fractions).

IV. தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணல் (Successive Integration).

2·1.2 வகைநுண்கணிதத்தில் எவ்வளவு சிக்கலான சார்பாகவிருந்தபோதிலும் அச்சார்பின் வகைக்கெழு கண்டு பிடித்து விடலாம். ஆனால் தொகைநுண்கணிதத்தில், சில திட்டமான அமைப்பில் உள்ள சார்புகளுக்கு மாத்திரமே தொகை காணமுடியும் ; அல்லது, கொடுக்கப்

பட்ட சார்பை, ஏதாமொரு முறையில், குறிப்பிட்ட திட்ட அமைப்பிற்கு மாற்றியமைத்து, அதன் பின்னரே தொகை காண இயலும்.

*2·13* மிக எளிதாகத் தோன்றும் சில சார்புகளுக்குக்கூட தொகை காண முடியாமற் போகலாம்.

*2·14* வகை நுண்கணிதத்திற்குரிய பரந்துபட்ட தன்மை, தொகை நுண்கணிதத்திற்குக் கிடையாது. வகைக்கெழுகாண நேரடியான பலவிதிகள் உள்ளன. எவ்வளவு சிக்கலான சார்பாயினும், அவ்விதிகளைப் பயன்படுத்தி வகைக்கெழு காணலாம்.

ஆனால் தொகை நுண்கணிதத்தில் அவ்வளவு பரந்து பட்ட தன்மை இல்லை. நேரடியான பல விதிகளைப் பயன் படுத்தினாலும், எல்லாவிதமான சார்புகளுக்கும் தொகை காணமுடியாமற் போனாலும் போகலாம்.

எடுத்துக்காட்டு : $\left(\sin^{-1}\sqrt{x}\right)\cos^{-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2\,tan\,x}}\right)$ என்ற சார்பிற்கு வகைக்கெழு காணலாம். ஆனால் அதே சார்பிற்குத் தொகை காண இயலாது.

*2·2* தொகை காணும் முறைகள் :

ஈடு செய்து தொகை காணல் :

$$y = F\left[\left(\phi(x)\right]\right. \qquad \textit{(1)} \text{ எனவும்,}$$

$$t = \phi(x) \qquad \textit{(2)} \text{ எனவும்,}$$

$$\frac{d}{dt}\Big[F(t)\Big] = f(t) \qquad \textit{(3)} \text{ எனவும் கொள்க.}$$

இப்போது வகைக்கெழு காணும் முறைப்படி,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx}$$

$$= \frac{d}{dt}\Big[F(t)\Big] \cdot \phi'(x) \qquad (1)\,;\ (2)$$

$$= f(t)\,\phi'(x) \qquad (3)\,;$$

$$= f\Big[\phi(x)\Big]\,\phi'(x) \qquad (4).$$

(1)ம் (4)ம் இணைத்துப் பார்க்கும்போது,

$$F\left[\phi(x)\right] = y = \int f\left[\phi(x)\right]\phi'(x)\,dx$$ எனக்

கிடைக்கிறது.

நடைமுறையில் இந்த விதியைக் கீழ்க்கண்ட முறையில் பயன்படுத்தலாம் :

$$\int f\left[\phi(x)\right]\phi'(x)\,dx$$ அறிய,

$\phi(x) = t$ எனவும்

$\phi'(x)\,dx = dt$ எனவும் கொண்டால்,

வேண்டிய தொகை $= \int f(t)\,dt$

$= F(t)$

$= f\left[\phi(x)\right]$ ஆகும்.

2·21 ஈடு செய்தல் முறை : எடுத்துக்காட்டு (1)

பொதுவாக $\int f(ax+b)\,dx$ என்ன ?

$ax+b = t$ எனக்கொண்டால்,

$a\,dx = dt.$

$$\therefore \int f(ax+b)\,dx = \int f(ax+b)\frac{dx}{dt}\,dt$$

$$= \int f(t)\,\frac{1}{a}\,dt.$$

$$= \frac{1}{a}\int f(t)\,dt.$$

இப்போது $\int f(t)\,dt = F(t)$ ஆனல்,

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(t)$$

$$= \frac{1}{a}F(ax+b).$$

சிறப்பாக : $\int (ax+b)^n dx$ என்ன ?

$t = (ax+b)$ எனக்கொள்க.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{a}$$

$$\therefore \int (ax+b)^n\, dx = \int (ax+b)^n \frac{dx}{dt}$$

$$= \int t^n . \frac{1}{a}\, dt$$

$$= \frac{1}{a} . \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

$$= \frac{1}{a} . \frac{(ax+b)^{n+1}}{(n+1)} \quad \left(n \neq -1\right).$$

2·211 இவ்வாறே பின்குறிப்பிட்ட திட்ட அமைப்புக்களை (வாய்பாடுகளை) எளிதில் அறியலாம் :

1. $$\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a\,(n+1)} \qquad \left(n \neq -1\right)$$

2. $$\int (ax+b)^{-1}\, dx = \int \frac{dx}{(ax+b)}$$

$$= \frac{1}{a} \log\,(ax+b).$$

3. (a) $$\int e^{ax+b}\, dx = \frac{1}{a} e^{(ax+b)}$$

(b) $$\int e^{ax}\, dx = \frac{1}{a} e^{ax}.$$

4. $$\int a^x\, dx = \int e^{x \log_e a}\, dx$$

$$= \frac{a^x}{\log_e a}$$

5. $$\int \cos\,(ax+b)\, dx = \frac{1}{a} \sin\,(ax+b)$$

6. $\int \sin(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$

7. $\int \sec^2(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\tan(ax+b)$

8. $\int \operatorname{cosec}^2(ax+b)\,dx = -\frac{1}{a}\cot(ax+b)$

9. $\int \sec(ax+b)\tan(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\sec(ax+b)$

10. $\int \operatorname{cosec}(ax+b)\cot(ax+b)\,dx = \frac{-1}{a}\operatorname{cosec}(ax+b)$

5, 6, 7, 8, 9, 10 வாய்பாடுகளில் $b = 0$ எனக் கொண்டால் பின்வரும் வாய்பாடுகள் கிடைக்கும் :

5 (a) $\int \cos ax\,dx = \frac{1}{a}\sin ax.$

6 (a) $\int \sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax$

7 (a) $\int \sec^2 ax\,dx = \frac{1}{a}\tan ax$

8 (a) $\int \operatorname{cosec}^2 ax\,dx = \frac{-1}{a}\cot ax$

9 (a) $\int \sec ax\tan ax\,dx = \frac{1}{a}\sec ax$

10 (a) $\int \operatorname{cosec} ax\cot ax\,dx = \frac{-1}{a}\operatorname{cosec} ax.$

## பயிற்சிகள் 2 (a)

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$—ஒட்டிய தொகை காண்க.

1. $(2+x)^3$ ; $(ax+b)^{3/2}$ ; $(b-ax)^n$.

2. $(x+a)^n$ ; $(3x+2)^4$ ; $(2-3x)^n$.
   $\sqrt{x+a}$ ; $(2x-a)^{5/2}$ ; $(4-3x)^{n/2}$.

3. $\frac{1}{(x+7)^8}$ ; $\frac{1}{(1-4x)^n}$ ; $\frac{1}{(3-4x)^7}$ .

4. $\frac{1}{\sqrt{x+a}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{a-bx}}$ ; $\frac{1}{(b+ax)^{p/q}}$.

5. $e^{4x+1}$ ; $e^{4-3x}$ ; $\sqrt{e^{x}}$ ; $a^{mx}$.

6. $\sin 4x$ ; $\cos(2x+3)$ ; $\sec^2(1-2x)$ ; $\operatorname{cosec}^2 5x$ ; $\sec 2x \tan 2x$ ; $a \operatorname{cosec} ax \cot ax$.

7. $\sin^2 2x$ ; $\cos^2 mx$ ; $(a-b)\sec^2 \frac{x}{2}$.

8. $\sin ax \cos ax$ ; $\cos mx . \cos nx$ ; $2 \sin 3x \cos x$ ; $2 \sin x \cos 5x$.

9. $\cos^3 x$ ; $\sin^3 x$ ; $\cos^3 3x$ ; $\sin^3 mx$.

10. $\sin x \sin 2x \sin 3x$ ; $\sin^2 x \cos 3x$, $\sin^3 x \cos^3 x$.

### 2·22 ஈடு செய்தல் முறை (2)

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$ என்ன ?

$x=a \sin t$ என ஈடு செய்க.

$$\frac{dx}{dt} = a \cos t.$$

$$\therefore \int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \int \frac{a \cos t}{a \cos t}\, dt$$
$$= t$$
$$= \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right).$$

குறிப்பு : $x = a \cos t$ எனக் கொண்டால்,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

இவ்விரண்டு தொகைகளும் சரியே. ஆனால் இதிலிருந்து $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = -\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ என்று கொள்ளுதல் பெருந் தவறாகும். உண்மையான நிலையென்னவெனில், $C_1$, $C_2$

பொருத்தமாகக் கொண்டால், $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C_1 =$
$-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C_2$ இது உண்மையென எளிதில் புலப்படும்;
ஏனெனில் $\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) = C_2 - C_1 = \frac{\pi}{2}$.

*2·221* இவ்வழியாகப் பின்கண்ட திட்ட அமைப்புக்கள் எளிதில் காணலாம்:

1. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$ அல்லது $-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$;

2. $\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$, அல்லது $-\cos^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$;

   [இங்கு $x = a \tan t$ அல்லது $x = a \cot t$, ஈடு செய்க.]

3. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

   அல்லது $-\frac{1}{a}\operatorname{cosec}^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

   [இங்கு $x = a \sec t$ அல்லது $a \operatorname{cosec} t$ என ஈடு செய்க.]

4. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

   அல்லது $\log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)$

   [இங்கு $x = a \sin h\, t$ என ஈடு செய்க]

5. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \cos h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$

   அல்லது $\log\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$

   [இங்கு $x = a \cos h\, t$ என ஈடு செய்க]

**2·23 ஈடு செய்தல் முறை (3)**

$\int f(x^m)\, x^{m-1}\, dx$ என்ன ?

$\int f(t)\,dt = F(t)$ எனக் கொள்வோம்.

$t = x^m$ என ஈடு செய்க

$$\therefore\ 1 = m\,x^{m-1}\ \frac{dx}{dt}$$

$$\therefore\ \frac{1}{m} = x^{m-1}\ \frac{dx}{dt}$$

இப்போது $\int f(x^m)\,x^{m-1}\,dx = \int f(x^m)\,x^{m-1}\ \frac{dx}{dt}\,dt$

$$= \frac{1}{m}\int f(t)\,dt$$

$$= \frac{1}{m}\,F(x^m)$$

எடுத்துக்காட்டு :

$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx$ என்ன ?

$x^3 = t$ எனக்கொண்டால்,

$$\int \frac{x^2}{1+x^6}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{dt}{1+t^2}$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(t)$$

$$= \frac{1}{3}\tan^{-1}(x^3).$$

**2·24 ஈடு செய்யும் முறை (4)**

இது பல இடங்களில் பயன்படும்.

$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx$ என்ன ?

இந்த அமைப்பில், மேற்சார்பு, கீழ்ச்சார்பின் முதல் வகைக்கெழு.

$f(x) = t$ என ஈடு செய்க.

$$f'(x)\ \frac{dx}{dt} = 1.$$

$$\therefore \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\ \frac{dx}{dt}\ dt$$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log t$$

$$= \log\,[f(x)].$$

எடுத்துக்காட்டு : (1)

$$\int \tan x\, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx$$

$$= -\log \cos x$$

$$= \log \sec x$$

அவ்வாறே,

$$\int \cot x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}\, dx$$

$$= \log \sin x.$$

இவ்விரண்டும் முக்கியமான வாய்பாடுகளாம்.

எடுத்துக்காட்டு : (2)

$$\int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot x}\, dx \quad \text{என்ன ?}$$

$1+\cot x = t$ எனக்கொண்டால்,

$$-\operatorname{cosec}^2 x\, dx = dt$$

$$\therefore \int \frac{\operatorname{cosec}^2 x}{1+\cot x}\, dx = -\int \frac{dt}{t}$$

$$= -\log(1+\cot x)$$

2·25 மற்றும் சில ஈடு செய்யும் முறைகள், பின்வரும் எடுத்துக் காட்டுகளால் விளங்கும் :

பல சார்புகளுக்குத் தொகை காணும் முயற்சியிலே, எந்த ஈடு, எங்கு பயன்படும் என்று பட்டறிவால், அறியப்படும். சில சமயங்களில், இரண்டு அல்லது அதற்கு மேற்பட்ட ஈடுகள் செய்து தொகை கண்டு பிடிக்க வேண்டியிருக்கலாம். மற்றும் பல முறைகள் பின்னர் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{a^2+b^2\cos^2 x}\, dx$ என்ன ?

இங்கு $\cos x = t$ எனக் கொண்டால்,

$$-\sin x\, dx = dt.$$

$$\therefore \int \frac{\sin x\,dx}{a^2+b^2\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{a^2+b^2t^2}$$
$$= \frac{-1}{b^2}\int \frac{dt}{\frac{a^2}{b^2}+t^2}$$
$$= \frac{-1}{b^2}\times\frac{b}{a}\tan^{-1}\left(\frac{tb}{a}\right)$$
$$= \frac{-1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{b\cos x}{a}\right)$$

2. $\int \frac{\sin(\cot^{-1}x)}{1+x^2}dx$ என்ன ?

$\cot^{-1}x = t$ எனஈடு செய்தால்,

$$-\frac{1}{1+x^2}\,dx = dt$$

$$\therefore \int \frac{\sin(\cot^{-1}x)}{1+x^2}dx = -\int \sin t\,dt$$
$$= \cos t$$
$$= \cos(\cot^{-1}x)$$

## பயிற்சிகள் 2 (b)

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$-ஒட்டிய தொகை காண்க :—

1. $\frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{a^2-b^2x^2}}$ .

2. $\frac{1}{1+9x^2}$ ; $\frac{1}{4+25x^2}$ ; $\frac{1}{a^2+b^2x^2}$ .

3. $\frac{1}{\sqrt{1-(ax+b)^2}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{m^2-(b-ax)^2}}$ ; $\frac{1}{1+(ax+b)^2}$ ;
$\frac{1}{m^2+(b-ax)^2}$ ; $\frac{1}{\sqrt{1+(ax+b)^2}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{(ax+b)^2-1}}$ ;
$\frac{1}{\sqrt{(ax+b)^2+m^2}}$ ; $\frac{1}{\sqrt{(b-ax)^2-m^2}}$ ; $\frac{1}{x\sqrt{x^2-9}}$ .

4. $x^{n-1}\sin(x^n)$.

5. $\frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}}$

6. $\frac{x}{\sqrt{1+x^4}}$

7. $\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

8. $\dfrac{x}{x^4+a^4}$

9. $\dfrac{x^3+x}{x^4-9}$

10. $\dfrac{4x^3+2x}{x^4+x^2}$

11. $\tan 2x$

12. $\cot mx$

13. $\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$

14. $\dfrac{\sin x}{(1+\cos x)^2}$

15. $\dfrac{1}{(1+x^2)\ \cot^{-1} x}$

16. $\dfrac{\cos^{-1}x}{\sqrt{1-x^2}}$

17. $\dfrac{(1+\sqrt{x})^n}{\sqrt{x}}$

18. $\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}+1}$

19. $(e^{ax}+1)^n\ e^{ax}$

20. $\dfrac{\sin x}{\cos^n x}$

21. $\dfrac{\cos x}{a+b\sin x}$

22. $\dfrac{x}{1+\sqrt{x}}$.

23. $\dfrac{x^5}{1+2x^6}$

24. $\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{x}\right)^n \dfrac{1}{x^2}$

25. $\dfrac{\sin(\log x)}{x}$

26. $\dfrac{e^{\cot^{-1} x}}{1+x^2}$

27. $\dfrac{\sin x}{\sqrt{a+b\cos^2 x}}$.

28. $\sin^4 x \cos x$.

29. $\tan^2 2x \sec^2 2x$.

30. $\dfrac{3x+2}{(3x^2+4x+2)^4}$.

31. $\dfrac{\sec x}{(\sec x+\tan x)^n}\ (n>0)$

32. $\dfrac{\sec^2 x}{(\sec x+\tan x)^n}\ (n>1)$

33. $\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$

34. $\dfrac{1}{a^2e^x+b^2e^{-x}}$

35. $\dfrac{\cos h\, x}{\sin h^2 x}$

36. $\dfrac{\sin hx}{\cos h^n x}$

37. $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 x}{(1+\cot x)^2}$

38. $\dfrac{1}{x\cos^2(1+\log x)}$

39. $\dfrac{\sin(\tan^{-1} x)}{1+x^2}$

40. $e^{\sin^2 x}$, $\sin 2x$

41. $xe^{x^2}$

42. $\dfrac{e^{\sqrt{x}} \sin e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

43. $\dfrac{x\sqrt{a^2-x^2}}{\sqrt{x^2+a^2}}$ ($x^2 = a^2 \cos 2\theta$ என ஈடு செய்க)

44. $\dfrac{\sin 2x}{4+3\cos^2 x}$

45. முதலில் $x = \tan\theta$ எனவும், பின்பு $1+x^2 = u$ எனவும் ஈடு செய்து $\int \dfrac{x^3}{(x^2+1)^3} dx$ காண்க.

இரண்டு தொகைகளும் வெவ்வேறல்ல என்பதை விளக்குக.

பகுதி 3

# தொகை காணும் வழி-வகைகள்

—(தொடர்ச்சி)

**3·1 சினைகள் பிரித்துத் தொகை காணல் :**

$\frac{d}{dx}\left(uv\right) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$ என்ற வகைக்கெழுவை அடிப்படையாகக் கொண்டு இம்முறை நிறுவப்படுகிறது.

இப்போது, மேற்கூறியதிலிருந்து,

$$uv = \int\left(u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}\right)dx$$

எனவே,

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = uv - \int v\frac{du}{dx}\,dx$$

அதாவது

$$\int u\frac{dv}{dx}\,dx = u \times \int\frac{dv}{dx}\,dx - \int\left[\int\frac{dv}{dx}\,dx \times \frac{du}{dx}\right]dx$$

இதை ஒரு வாய்பாட்டு முறையில் கூற,

$$\frac{d}{dx}\left(u\right) = u^1$$

$$\frac{d}{dx}\left(v\right) = v^1 \text{ எனவும்,}$$

$$\int u\,dx = u_1$$

$$\int v\,dx = v_1 \text{ எனவும்,}$$

குறியீடுகளால் குறிப்பிட்டால்,

$$\int u\,v\,dx = u\,v_1 - \int v_1\,u^1\,dx$$

அல்லது

$$= u_1\,v - \int u_1\,v^1\,dx$$

சார்பு வகையில் $f^1(x) = \frac{d}{dx} f(x)$ எனவும்

$f_1(x) = \int f(x)\,dx$ எனக் குறிப்பிட்டால்,

$\int \phi(x)\,\psi(x)\,(dx) = \phi_1(x)\,\psi(x) - \int \phi_1(x)\;\psi^1(x)\,dx$ அல்லது

$$= \psi_1(x)\,\phi(x) - \int \psi_1(x)\,\phi^1(x)\,dx.$$

சொற்களால் கூறுமிடத்து (ஒரு சார்பு × மற்றொரு சார்பு)ன் தொகை = ஒரு சார்பின் தொகை × மற்றைய சார்பு $-\int$ (தொகை காணப்பட்ட சார்பு) × மற்றைய சார்பின் வகைக்கெழு.

**3·11** இந்த விதியைப் பயன்படுத்தும்போது, முதலில் எச்சார்பின் தொகை காண்பது, எச்சார்பை அப்படியே கொள்வது என்பது பயிற்சியால் புலப்படும்.

குறிப்பு :

*(1)* சில சமயங்களில் ஒரே ஒரு சார்பை $1 \times f(x)$ என்ற பெருக்கு மதிப்பாகக் கொள்ள வேண்டியிருக்கும். $\int 1 \times f(x)\,dx = x\,f(x) - \int x\,f^1(x)\,dx$ எனவரும்.

*(2)* ஒரு முறைக்கு மேல் பன்முறை இவ்விதியைக் கையாள வேண்டியிருக்கும்.

*(3)* இவ்விதியைக் கையாளுங்கால், இடது கைப்புறம் உள்ள நாம் காண வேண்டிய தொகையே, வலது கைப்புறத்திலும் தோன்றலாம். அப்போது அத் தொகையை இடது கைப்புறம் கொணர்ந்து வேண்டிய தொகை காண வேண்டியிருக்கும்.

**3·111** பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுக்கள், இவ்விதியைக் கையாளும் முறையை விளக்கிக் காட்டும்.

**(1)** $\int x \cos x\,dx = x \sin x - \int \sin x\,dx$

$$= x \sin x + \cos x,$$

2. $\int \log(ax+b)\,dx = \int 1 \times \log(ax+b)\,dx$

$$= x\log(ax+b) - \int \frac{xa}{ax+b}\,dx$$

$$= x\log(ax+b) - \int\left(1 - \frac{b}{ax+b}\right)dx$$

$$= x\log(ax+b) - x + \frac{b}{a}\log(ax+b).$$

இது குறிப்பு (1)க்கு எடுத்துக்காட்டு.

3. $\int x^2 \cos ax\,dx = x^2 \frac{1}{a}\sin ax - \int 2x \frac{1}{a}\sin ax\,dx$

$$= \frac{x^2}{a}\sin ax - \frac{2}{a}\int x\sin ax\,dx$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{-1}{a}\cos ax\cdot x - \int -\frac{1}{a}\cos ax\,dx$$

$$= -\frac{x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax.$$

$$\therefore \int x^2\cos ax\,dx = \frac{x^2}{a}\sin ax - \frac{2}{a}\left(\frac{-x}{a}\cos ax + \frac{1}{a^2}\sin ax\right)$$

$$= \frac{x^2}{a}\sin ax + \frac{2x}{a^2}\cos ax - \frac{2}{a^3}\sin ax.$$

இது குறிப்பு (2)க்கு எடுத்துக்காட்டு.

4. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \int 1 \times \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x\cdot 2x}{2\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int \frac{x^2-a^2+a^2}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx$$

$$= x\sqrt{x^2-a^2} - \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx - a^2\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$$

$$\therefore 2\int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

$$\therefore \int\sqrt{x^2-a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2-a^2} - a^2\cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]$$

இவ்வாறே,

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2}+a^2\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] \text{ எனவும்}$$

$$\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \tfrac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2+a^2}+a^2\sin h^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right] \text{ எனவும்}$$

நிறுவலாம்.

ஈடு செய்தல் முறையிலும் இத் தொகைகள் கண்டு பிடிக்கலாம். பின்னர் அம்முறைகளைக் காண்க.

**3·112** ஈடு செய்தல் முறையில்

(i) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$

(ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$

(iii) $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx$ காணும் வழிகள் :

(i) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx$ காண $x = a\sin\theta$ என ஈடு செய்க.

$$dx = a\cos\theta\,d\theta.$$

$$\sqrt{a^2-x^2} = a\cos\theta$$

$$\therefore \int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int a^2\cos^2\theta\,d\theta$$

$$= a^2\int\left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)d\theta$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta+\tfrac{1}{2}\sin 2\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\theta+\sin\theta\cos\theta\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)+\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\right]$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]+\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}.$$

$x = a\cos\theta$ எனவும் ஈடு செய்து இத்தொகை அறியலாம்.

(ii) $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx$ காண, $x = a\cos h\,\theta$ என ஈடு செய்க.

$$dx = a\sin h\theta\,d\theta$$

$$\sqrt{x^2-a^2} = \sqrt{a^2\cos h^2\theta-a^2} = a\sin h\,\theta$$

$$\therefore \quad \int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx = \int a^2 \sin h^2 \theta \, d\,\theta$$

$$= a^2 \int \frac{\cos h\, 2\,\theta - 1}{2}\, d\,\theta$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{\sin h\, 2\,\theta}{2} - \theta \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[ \sin h\, \theta \cos h\, \theta - \theta \right]$$

$$= \frac{a^2}{2} \left[ \frac{x}{a} \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1} - \cos h^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \right]$$

$$= x\sqrt{x^2 - a^2} - \frac{a^2}{2} \log \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$$

(iii) $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$ காண, $x = a \sin h\, \theta$ என ஈடு செய்து தொகை பெறுக.

இவ்வழியாக $\int \sqrt{ax^2 + bx + c}\;\; dx$ என்னவென்று அறிய இயலும்.

எடுத்துக் காட்டுகள் :

1. $$\int \sqrt{3x^2 - 6x}\, dx = \sqrt{3} \int \sqrt{x^2 - 2x}\, dx$$

$$= \sqrt{3} \int \sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left[ (x-1)\sqrt{x^2 - 2x} - \cos h^{-1}(x-1) \right]$$

2. $$\int \sqrt{12 + 4x - x^2}\;\; dx = \int \sqrt{4^2 - (x-2)^2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[ (x-2)\sqrt{12 + 4x - x^2} + 16 \sin^{-1} \left( \frac{x-2}{4} \right) \right]$$

3. $$\int \sqrt{x^2 + 2x + 5}\, dx = \int \sqrt{(x+1)^2 + 2^2}\, dx$$

$$= \tfrac{1}{2} \left[ (x+1)\sqrt{x^2 + 2x + 5} + 4 \sin h^{-1} \left( \frac{x+1}{2} \right) \right]$$

(5) எடுத்துக் காட்டு :

$$\int e^x \cos x\,dx = e^x \cos x - \int e^x (-\sin x)\,dx$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x\,dx$$

$$= e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x\,dx$$

$$\therefore 2\int e^x \cos x\,dx = e^x (\cos x + \sin x)$$

$$\therefore \int e^x \cos x\,dx = \tfrac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x)$$

(6) பொதுவான ஒரு எடுத்துக் காட்டு :

$$I = \int e^{ax} \cos bx\,dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx - \int \frac{1}{a} e^{ax} (-b \sin bx)\,dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bx\,dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a} \left[ \frac{1}{a} e^{ax} \sin bx - \int \frac{1}{a} e^{ax}\, b \cos bx\,dx \right]$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos bx + \frac{b}{a^2} e^{ax} \sin bx - \frac{b^2}{a^2} I.$$

$$\therefore I \left(1 + \frac{b^2}{a^2}\right) = e^{ax} \left( \frac{\cos bx}{a} + \frac{b \sin bx}{a^2} \right)$$

$$\therefore I \left( \frac{a^2 + b^2}{a^2} \right) = \frac{e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)}{a^2}$$

$$\therefore I = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx) \quad (1)$$

இவ்வாறே

$$\int e^{ax} \sin bx\,dx = \frac{1}{a^2 + b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx) \quad (2)$$

என நிறுவலாம்.

வேறோர் இடத்தில் (4·6-ல்) இவ்விரண்டு தொகைகளும் ஒன்றுக்கொன்று இணைந்த துணைகளாக உள்ளவை என்று நிறுவப்படும்.

## பயிற்சிகள் 3

கீழ்க்கண்ட சார்புகளுக்கு (சினைபிரித்து) $x$ ஒட்டிய தொகை காண்க:

1. $x \sec^2 x$
2. $x \operatorname{cosec}^2 x$
3. $x \sin x$
4. $x \log x$
5. $x^n \log x$
6. $\frac{1}{x} \log (\log x)$
7. $x^2 e^{2x}$
8. $x a^x$
9. $x^3 e^{x^2}$
10. $x \sin x \cos x$
11. $\log_e x$
12. $\sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right)$
13. $\tan^{-1} x$
14. $\cot^{-1} x$
15. $\frac{e^x (x+1)}{(x+2)^2}$
16. $\frac{e^x (x^2 + 3x + 3)}{(x + 2)^2}$
17. $\frac{e^x (x + a - 1)}{(x + a)^2}$
18. $x \sin^{-1} x$
19. $x \cot^{-1} x$
20. $(\log_e x)^2$

21. $$\int u \frac{d^2 v}{dx^2} dx = u \frac{dv}{dx} - v \frac{du}{dx} + \int v \frac{d^2 u}{dx^2} dx$$ என நிறுவுக.

22. $\int_0^{\pi} x \sin^3 x dx$-ன் மதிப்பென்ன ?

23. $\int_0^1 \frac{x \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$-ன் மதிப்பென்ன ?

24. $\int_0^1 \frac{x^3 \sin^{-1} x}{\sqrt{1 - x^2}} dx$-ன் மதிப்பென்ன ?

தொகை காண்க :

25. $\dfrac{x^2 \tan^{-1} x}{1 + x^2}$

26. $\sqrt{8 - 2x - x^2}$

27. $\sqrt{2x^2 + 3x - 4}$

28. $\sqrt{x^2 + 8x + 25}$

29. $e^{3x} \cos 4x$

30. $e^x \cos^2 x$

31. $a^x \sin x$

32. $e^{-3x} \cos (2x - 3)$

33. $e^{2x} \sin 3x \cos 5x$

34. $e^{3x} \cos 4x \cos x$

35. $xe^{3x} \cos 2x$

36. $(3x - 2) \sqrt{x^2 + x + 1}$

37. $(x + a) \sqrt{x^2 + 2ax + b}$

38. $(ax - b) \sqrt{ax^2 - 2bx + c}$

39. $x \sqrt{x^2 + ax}$

40. $x \sqrt{3 - 2x - x^2}$

பகுதி 4

# தொகை காணும் வழி-வகைகள்

—(தொடர்ச்சி)

## 4·1 பகுதிகளாக்கித் தொகை காணல் :

$$\int \left[f(x) + \mathrm{F}(x) - \psi(x)\right] dx = \int f(x)\,dx + \int \mathrm{F}(x)\,dx -$$

$\int \psi(x)\,dx$ என்று நாம் முன்னர் 1·71 (3) ல் பார்த்திருக்கிறோம்.

கொடுக்கப்பட்ட சார்பை, பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரித்து ( Partial fractions ) ஒவ்வொரு பின்னத்திற்கும் தொகை காண்பது இம் முறையாகும். சில இயற் கணித சார்புகளுக்கும், சில முக்கோண கணித சார்புகளுக்கும் இம் முறை பயன்படும்.

### 4·11 முக்கிய எடுத்துக்காட்டுகள் : (வாய்பாடுகளில் சில)

(1) $\int \frac{dx}{x^2 - a^2}$ என்ன ?

$$\frac{1}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$$ என்பது நமக்குத் தெரியும்.

ஆகவே $$\int \frac{dx}{(x^2 - a^2)} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2a}\left[\log(x-a) - \log(x+a)\right]$$

$$= \frac{1}{2a}\log\left(\frac{x-a}{x+a}\right)$$

(2) அவ்வாறே,

$$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \int \left( \frac{1}{a + x} + \frac{1}{a - x} \right) dx$$

$$= \frac{1}{2a} \left[ \log (a + x) - \log (a - x) \right]$$

$$= \frac{1}{2a} \log \left( \frac{a + x}{a - x} \right)$$

**சாதாரண எடுத்துக்காட்டுகள் :**

(1) $\int \frac{dx}{(x + 1)^2 (1 - 2x)}$ ஏன்ன ?

முதலில் $\frac{1}{(x + 1)^2 (1 - 2x)}$ ஐப் பகுதிப் பின்னங்களாகப் பிரிக்க வேண்டும்.

$\frac{1}{(x + 1)^2 (1 - 2x)} \equiv \frac{A}{x + 1} + \frac{B}{(x + 1)^2} + \frac{C}{(1 - 2x)}$ எனக் கொள்க.

அப்போது, $1 \equiv A \ (x + 1) \ (1 - 2x) + B \ (1 - 2x) + C \ (x+1)^2$ இ∴தோர் முற்றொருமையாதலின், $x$-க்கு எம்மதிப்பு கொடுத்தாலும் இருபக்கங்களும் சமமாகவிருக்கும்

$$x = -1 ; \quad 1 = 3B$$

$$\therefore B = \frac{1}{3}$$

$$x = \frac{1}{2} ; \quad 1 = \frac{9}{4} C$$

$$\therefore C = \frac{4}{9}$$

$$x = o ; \quad 1 = A + B + C$$

$$\therefore A = 1 - B - C$$

$$= \frac{2}{9}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{(1+x)^2(1-2x)} = \int \left[ \frac{2}{9(x+1)} + \frac{1}{3(x+1)^2} + \frac{4}{9(1-2x)} \right] dx$$

$$= \frac{2}{9} \log(x+1) - \frac{1}{3(x+1)} - \frac{9}{2} \log(1-2x)$$

$$= \frac{-1}{3(x+1)} + \frac{2}{9} \log(x+1) \;/\; (1+2x)$$

### பயிற்சிகள் 4 *(a)*

கீழ்க்கண்ட சார்புகளுக்கு $x$ — ஒட்டிய தொகை காண்க. (பகுதி பின்ன முறை) :

1. $\dfrac{1}{x^2-9}$
2. $\dfrac{1}{9-4x^2}$
3. $\dfrac{1}{(x+3)^2-2^2}$
4. $\dfrac{1}{4-(2x-1)^2}$
5. $\dfrac{1}{(x-2)(x-3)}$
6. $\dfrac{5}{(3x-1)(2x+1)}$
7. $\dfrac{2x+3}{(x^3+x^2-2x)}$
8. $\dfrac{2x(a^2-b^2)}{(x^2-a^2)(x^2-b^2)}$
9. $\dfrac{3x^2+4}{(x+2)^2(x-3)}$
10. $\dfrac{x^3}{(x-1)(x+2)(2x+3)}$
11. $\dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$
12. $\dfrac{(x-a)(x-b)(x-c)}{(x-p)(x-q)(x-r)}$
13. $\dfrac{x}{(x-1)^2(x+2)}$
14. $\dfrac{x^2+1}{(x+1)^3(x-2)}$
15. $\dfrac{x^2+2}{(x-1)(x-2)^3}$

**4·2 சில பல அமைப்புக்களின் தொகை காணல் — இருபடிச் சார்புகளும் அவைகளின் மூலங்களும்**

I. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$.

II. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

III. $\displaystyle\int \sqrt{ax^2+bx+c}\; dx$

என்ற அமைப்புக்களை முறையே ஆராய்வோம்.

4·21 அமைப்பு I:

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}.$$

இதன் மதிப்பை,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} \; ; \quad \int \frac{dx}{x^2 - a^2} \; ; \quad \int \frac{dx}{a^2 - x^2}$$

என்ற அமைப்புக்களையொட்டிய முறையில் காண முடியும். இம் மூன்று தொகைகளும் முறையே

$$\frac{1}{a} \tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right);$$

$$\frac{1}{2a} \log\left(\frac{x-a}{x+a}\right);$$

$$\frac{1}{2a} \log\left(\frac{a+x}{a-x}\right)$$

என நாம் முன்னர் 2·221, 4·11 ல் கண்டிருக்கிறோம்.

$a, b, c$-ன் மதிப்புக்களையொட்டி, $ax^2 + bx + c$ என்ற கோவையைத் தகுந்த முறையில் அமைத்து, பின்னர் ஒரு எளிய ஈடு செய்ய வேண்டியிருப்பின், அதையும் செய்து, $\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$ என்னவென அறியலாம்.

அஃதோடல்லாமல், $ax^2+bx + c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$ என்று இருசினை பிரிக்க முடியுமானால் பிரித்து

$$\int \frac{dx}{ax^2 + bx + c} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}$$ எனக் கொண்டு,

பகுதி பின்னங்களாக்கித் தொகை காணலாம். எல்லாம் ஒரே விடையைத்தானளிக்கும்.

பின்வரும் எடுத்துக்காட்டுகளைக் காண்க :

(1) $\int \frac{1}{x^2 + a^2}$ அமைப்பு.

$$\int \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}$$

$$= \tfrac{1}{4} \int \frac{dx}{x^2 + x + \frac{5}{4}}$$

$$= \tfrac{1}{4} \int \frac{dx}{(x + \frac{1}{2})^2 + 1}$$

இங்கு $x + \frac{1}{2} = t$ என ஈடு செய்தால் $dx = dt$.

$$\therefore \text{ தொகை } = \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2 + 1}$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1} (t)$$

$$= \frac{1}{4} \tan^{-1} \left( \frac{2x + 1}{2} \right)$$

(2) $\frac{1}{x^2 - a^2}$ அமைப்பு

$$\int \frac{dx}{x^2+5x+6} = \int \frac{dx}{\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2}$$

இங்கு $\left(x + \frac{5}{2}\right) = t$ எனக்கொண்டால்,

$$\text{தொகை} = \int \frac{dt}{t^2 - (\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{2 \times \frac{1}{2}} \log \left( \frac{t - \frac{1}{2}}{t + \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \log \left( \frac{x + 2}{x + 3} \right)$$

இதையே பகுதி பின்ன முறையிலும் பின்வருமாறு காணலாம் :

$$\int \frac{dx}{x^2 + 5x + 6} = \int \left( \frac{1}{x + 2} - \frac{1}{x + 3} \right) dx$$

$$= \log \left( \frac{x + 2}{x + 3} \right)$$

(3) $\frac{1}{a^2 - x^2}$ அமைப்பு.

$$\int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}x - x^2}$$

$$= \frac{1}{3} \int \frac{dx}{(\frac{2}{3})^2 - (x + \frac{1}{3})^2}$$

இங்கு $x + \frac{1}{3} = t$ என ஈடு செய்தால்,

$$\text{தொகை} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{(\frac{2}{3})^2 - t^2}$$
$$= \frac{1}{3 \times \frac{4}{3}} \log \left( \frac{\frac{2}{3} + t}{\frac{2}{3} - t} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \log \left( \frac{\frac{2}{3} + x + \frac{1}{3}}{\frac{2}{3} - x - \frac{1}{3}} \right)$$
$$= \frac{1}{4} \log \left[ \frac{3(x+1)}{(1-3x)} \right]$$
$$= \frac{1}{4} \log \left( \frac{x+1}{1-3x} \right) + \frac{1}{4} \log 3 \qquad (A)$$

$\frac{1}{4} \log 3$ ஒரு மாறிலியாதலின், $\frac{1}{4} \log 3$ ஐத் தொகையிலிருந்து கழிக்கவும் செய்யலாம். அப்போது தொகை $= \frac{1}{4} \log \left( \frac{x+1}{1-3x} \right)$

இதையே பகுதி பின்ன முறையிலும் பின்வருமாறு செய்யலாம்.

$$\int \frac{dx}{1 - 2x - 3x^2} = \int \left[ \frac{1}{4(x+1)} + \frac{3}{4(1-3x)} \right] dx$$
$$= \frac{1}{4} \left[ \log (x+1) - \log (1-3x) \right]$$
$$= \frac{1}{4} \log \left( \frac{x+1}{1-3x} \right) \qquad (B)$$

$(A)$க்கும் $(B)$க்கும் உள்ள வேறுபாடு $\frac{1}{4} \log 3$ என்ற மாறிலி.

4·22 அமைப்பு II :

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$$

இதன் மதிப்பை,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} \; ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} \; ; \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

என்ற அமைப்புக்களையொட்டிய முறையில் காணமுடியும். இம் மூன்று தொகைகளும் முறையே,

$$\sin h^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \text{ அல்லது } \log \left( \frac{x + \sqrt{x^2 + a^2}}{a} \right) ;$$
$$\sin^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \text{ அல்லது } - \cos^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) ;$$
$$\cosh^{-1} \left( \frac{x}{a} \right) \text{ அல்லது } \log \left( \frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a} \right)$$

என நாம் முன்னர் 2·221 ல் கண்டிருக்கிறோம்.

இங்கு $a, b, c$-ன் மதிப்புக்களை யொட்டி, $\sqrt{ax^2+bx+c}$ ஐத் தகுந்த முறையில் அமைத்து, பின்னர் ஒரு எளிய ஈடு செய்ய வேண்டியிருப்பின் அதையும் செய்து,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$ என்னவென அறியலாம்.

ஏடுத்துக்காட்டு : (1) $\dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$ என்ற அமைப்பு.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-18x-9x^2}} = \frac{1}{3} \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{10}{9}-(x+1)^2}}$$

இங்கு $x+1=t$ என ஈடு செய்க.

$$\text{தொகை} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{\sqrt{\left(\frac{\sqrt{10}}{3}\right)^2-t^2}}$$

$$= \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{3t}{\sqrt{10}}\right).$$

$$= \frac{1}{3} \sin^{-1}\left[\frac{3(x+1)}{\sqrt{10}}\right]$$

எடுத்துக்காட்டு : (2) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$ என்ற அமைப்பு.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+4x+8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+2)^2+2^2}}$$

இங்கு $x+2=t$ என ஈடு செய்க.

$$\text{தொகை} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+2^2}}$$

$$= \sin h^{-1}\left(\frac{t}{2}\right)$$

$$= \sin h^{-1}\left(\frac{x+2}{2}\right)$$

அல்லது $= \log\left[\dfrac{(x+2)+\sqrt{x^2+4x+8}}{2}\right]$

எடுத்துக்காட்டு : (3) $\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$ என்ற அமைப்பு.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 8x - 20}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x+4)^2 - 6^2}}$$

இங்கு $x + 4 = t$ என ஈடு செய்க.

தொகை $= \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 6^2}}$

$$= \cos h^{-1} \left(\frac{t}{6}\right)$$

$$= \cos h^{-1} \left(\frac{x+4}{6}\right)$$

4·23 அமைப்பு III: $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ என்ற அமைப்பு. இது $\int \sqrt{x^2 + a^2}\, dx$; $\int \sqrt{x^2 - a^2}\, dx$; $\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ என்ற மூன்று அமைப்புக்களை யொட்டிய முறையில் அமைக்கப் படலாம். இம் மூன்று தொகைகளும் முறையே,

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 + a^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \log \left( x + \sqrt{x^2 + a^2} \right);$$

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2 - a^2} - \tfrac{1}{2}a^2 \log \left( x + \sqrt{x^2 - a^2} \right);$$

$$\tfrac{1}{2}x\sqrt{a^2 - x^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right)$$

என்று நாம் முன்னர் *3·111(4)*ல் குறிப்பிட்டுள்ளோம்.

எடுத்துக்காட்டு : (1) $\sqrt{x^2 + a^2}$ என்ற அமைப்பு.

$$\int \sqrt{x^2 - 4x + 8}\, dx = \int \sqrt{(x-2)^2 + 2^2}\, dx$$

இங்கு $x - 2 = t$ எனவும் $2 = a$ எனவும் ஈடுசெய்தால்,

தொகை $= \int \sqrt{t^2 + 2^2}\, dt.$

$$= \tfrac{1}{2}\, t \sqrt{t^2 + a^2} + \tfrac{1}{2}a^2 \log \left( t + \sqrt{t^2 + a^2} \right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(x-2)\sqrt{x^2 - 4x + 8} + 2 \log \left[ (x-2) + \sqrt{x^2 - 4x + 8} \right]$$

எடுத்துக்காட்டு : (2) $\sqrt{x^2 - a^2}$ என்ற அமைப்பு.

$$\int\sqrt{x^2 - 2x}\, dx = \int\sqrt{(x-1)^2 - 1^2}\, dx.$$

$x - 1 = t$ என ஈடு செய்தால்,

$$\text{தொகை} = \int\sqrt{t^2 - 1^2}\, dt$$

$$= \tfrac{1}{2} t \sqrt{t^2 - 1} - \tfrac{1}{2} \log\left(t + \sqrt{t^2 - 1}\right)$$

$$= \tfrac{1}{2}(x - 1)\sqrt{x^2 - 2x} - \tfrac{1}{2} \log\left(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x}\right)$$

எடுத்துக்காட்டு : (3) $\sqrt{a^2 - x^2}$ என்ற அமைப்பு.

$$\int\sqrt{5 - 3x^2 - 6x}\, dx = \sqrt{3}\int\sqrt{\frac{5}{3} - 2x - x^2}\, dx$$

$$= \sqrt{3}\int\sqrt{\frac{8}{3} - (x+1)^2}\, dx.$$

$x + 1 = t$ எனவும், $a^2 = \dfrac{8}{3}$ எனவும், ஈடுசெய்க

$$\text{தொகை} = \sqrt{3}\int\sqrt{a^2 - t^2}\, dt$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[ t\sqrt{a^2 - t^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{t}{a}\right)\right]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left[(x+1)\sqrt{\frac{5}{3} - 2x - x^2} + \frac{8}{3}\sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\,(x+1)\right)\right]$$

**4·3 மற்றும் சில அமைப்புக்கள் :**

I. $\dfrac{f(x)}{ax^2 + bx + c}$ ; சிறப்பாக $\dfrac{px + q}{ax^2 + bx + c}$

II. $\dfrac{f(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ ; சிறப்பாக $\dfrac{px + q}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$

இங்கு

$f(x) = + a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ (n ஒரு கூட்டு முழு எண்).

*4·31* அமைப்பு I : $f(x)$ ஐ $ax^2 + bx + c$ ஆல் சாதாரணமாக வகுத்தால்,

$Ax^{n-2} + Bx^{n-3} + \ldots + P$ என்ற ஈவும், $\dfrac{px + q}{ax^2 + bx + c}$ என்ற மீதியும் வரும்.

$\int (Ax^{n-2} + Bx^{n-3} \ . \ . \ . + P)\, dx$ உறுப்புறுப்பாகக் காணலாம். $\left[\text{வாய்ப்பாடு } \int x^m\, dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}\right]$ ஆகவே, எஞ்சியிருப்பது,

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\, dx$$

இங்கு $px + q = \frac{p}{2a}(2ax + b) + \left(q - \frac{pb}{2a}\right)$ என்று எழுதினால்,

$$\int \frac{px + q}{ax^2 + bx + c}\, dx = \frac{p}{2a} \int \frac{2ax + b}{ax^2 + bx + c}\, dx + \left(\frac{q - pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$$ எனவரும்.

வலதுகைப்புறம் முதல் தொகை $\frac{f^1(x)}{f(x)}$ அமைப்பு

$\therefore$ அதன் தொகை $= \frac{p}{2a} \log \left(ax^2 + bx + c\right)$.

இரண்டாம் தொகை $= \left(q - \frac{pb}{2a}\right) \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}$

அமைப்பிலுள்ளது. அதன் தொகை காண்பது முன்னர் 4·21-ல் விளக்கப்பட்டது.

எனவே $\int \frac{f(x)\, dx}{ax^2 + bx + c}$ அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு.

1. $\int \frac{2x^3 - 11x^2 - 11x + 26}{x^2 - 7x + 6}\, dx$ என்ன ?

$$\begin{array}{r|l} x^2 - 7x + 6 & 2x^3 - 11x^2 - 11x + 26 \quad (2x + 3 \\ & 2x^3 - 14x^2 + 12x \\ \hline & \quad 3x^2 - 23x + 26 \\ & \quad 3x^2 - 21x + 18 \\ \hline & \qquad\quad - 2x + 8 \end{array}$$

தொகை $= \int \left(2x + 3 - \frac{2x - 8}{x^2 - 7x + 6}\right) dx$

$$= \frac{(2x + 3)^2}{4} - 2 \int \frac{x - 4}{x^2 - 7x + 6}\, dx.$$

$$\frac{x-4}{x^2-7x+6} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-6)}$$ எனக் கொண்டால்

$$= \frac{3}{5(x-1)} + \frac{2}{5(x-6)}$$

$$\therefore \quad -2\int\frac{x-4}{x^2-7x-6}\,dx = -\frac{2}{5}\int\left(\frac{3}{x-1}+\frac{2}{x-6}\right)dx$$

$$= -\frac{6}{5}\log(x-1) - \frac{4}{5}\log(x-6)$$

$$\therefore \text{ முழுத்தொகை } = \frac{(2x+3)^2}{4} - \frac{1}{5}\log(x-1)^6(x-6)^4$$

2. $\int\frac{1-3x}{2x^2-6x+5}$ என்ன ?

$$\frac{d}{dx}\left(2x^2-6x+5\right) = 4x-6$$

$$\therefore 1-3x = -\frac{3}{4}\left(4x-6\right)-\frac{7}{2}$$

$$\therefore \text{ தொகை} = -\frac{3}{4}\int\frac{4x-6}{2x^2-6x+5}\,dx - \frac{7}{2}\int\frac{dx}{2\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)}$$

$$= -\frac{3}{4}\int log\left(2x^2-6x+5\right) - \frac{7}{4}\int\frac{dx}{\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)}$$

$$\int\frac{dx}{\left(x^2-3x+\frac{5}{2}\right)} = \int\frac{dx}{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(\frac{1}{2})^2}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$= 2\tan^{-1}(2x-3)$$

$$\therefore \text{ முழுத் தொகை} = -\tfrac{3}{4}\log(2x^2-6x+5) - \tfrac{7}{2}\tan^{-1}(2x-3)$$

**4·32 அமைப்பு II.** $\dfrac{f(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$.

$\int\frac{C_0x^n+C_1x^{n-1}+\ldots+C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ என்ன ?

$$\int = (A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots A_{n-1}) \sqrt{ax^2 + bx + C}$$

$$+ An \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + C}}$$ எனக்கொள்க.

இருபுறங்களுக்கும் $x$ — வகைக்கெழுகண்டு, இருபுறங்களையும் $\sqrt{ax^2 + bx + C}$ ஆல் பெருக்கினல்,

$$C_0 x^n + C_1 x^{n-1} + \ldots \quad + C_n$$

$$= \left\{ (n-1)A_0 x^{n-2} + (n-2) A_1 x^{n-3} + \ldots . A_{n-2} \right\} (ax^2 + bx + c)$$

$$+ (A_0 x^{n-1} + A_1 x^{n-2} + \ldots + A_{n-1}) (ax + \tfrac{1}{2}b)$$

$$+ An.$$

சமபடிக் கெழுக்களை சமன்பாடு செய்தால், $(n + 1)$ சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். அவைகளிலிருந்து $A_0, A_1, \ldots An$. கண்டு பிடிக்கலாம். மேலும் $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + C}}$ கண்டு பிடிக்கலாம், எனவே முழுத் தொகை கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx$$ என்ன ?

$$\int \frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}} dx = (A_0 x^2 + A_1 x + A_2) \sqrt{x^2 - x + 1}$$

$$+ A_3 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$ எனக் கொள்க.

இருபுறங்களுக்கு $x$ — வகைக்கெழுகண்டு, இரு புறங்களையும் $\sqrt{x^2 - x + 1}$ ஆல் பெருக்க.

$$x^3 + 1 \equiv (2 A_0 x + A_1)(x^2 - x + 1)$$

$$+ (A_0 x^2 + A_1 x + A_2)(x - \tfrac{1}{2}) + A_3$$

$$\equiv x^3 (3A_0) + x^2 (2A_1 - \tfrac{5}{2} A_0)$$

$$+ x (2A_0 - \tfrac{3}{2} x_1 + A_2) + (A_1 - \tfrac{1}{2} A_2 + A_3)$$

சமக்கெழுக்களைச் சமன்பாடு செய்தால்,

$$A_0 = \tfrac{1}{3}; \quad A_1 = \frac{5}{12}; \ A_2 = -\frac{1}{24}; \ A_3 = \frac{9}{16}$$ எனக்

கிடைக்கும்,

எனவே, தொகை

$$= \left(\frac{1}{3}x^2 + \frac{5}{12}x - \frac{1}{24}\right)\sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{9}{16}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-x+1}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - x + 1}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-\frac{1}{2})^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}}$$

$$= \log\left[(x - \tfrac{1}{2}) + \sqrt{x^2 - x + 1}\right]$$

எனவே முழுத் தொகை

$$= \left(\frac{8x^2 + 10x - 1}{24}\right)\sqrt{x^2-x+1} + \frac{9}{16}\left[\log(x-\tfrac{1}{2}) + \sqrt{x^2-x+1}\right]$$

சிறப்பாக $\int \frac{px+q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx$ காண

முன்னர் 4·31-ல்

காட்டப்பட்ட ஈடு முறையையே கையாளுவோம்.

$ax^2 + bx + c = u$ எனக்கொள்க.

$$(2ax + b)\, dx = du$$

$$px + q = \frac{p}{2a}(2ax + b) + \left(q - \frac{bp}{2a}\right)$$

$$\therefore \int \frac{px + q}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx = \frac{p}{2a}\int \frac{2ax+b}{\sqrt{ax^2+bx+c}}dx + \left(q - \frac{bp}{2a}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

வலது பக்கம், முதல் தொகை

$$= \frac{p}{2a}\int \frac{du}{u^{1/2}}$$

$$= \frac{p}{a}u^{1/2}$$

$$= \frac{p}{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}$$

இரண்டாவதுள்ள $\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}$ நாம்

முன்னர் அறிந்த அமைப்பு.

ஆகவே

$$\int \frac{(px+q)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = \frac{p}{a}\sqrt{ax^2+bx+c} + k\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

எனக் கிடைக்கப் பெறும்.

எடுத்துக் காட்டு :

1. $\int \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx$ என்ன ?

$$x^2+2x-3=u$$
$$(2x+2)\,dx=du$$
$$4x+7=2\,(2x+2)+3$$

$$\therefore \int \frac{4x+7}{\sqrt{x^2+2x-3}}\,dx=2\int\frac{(2x+2)\,dx}{\sqrt{x^2+2x-3}}+3\int\frac{dx}{\sqrt{(x+1)^2-4}}$$
$$=2\int\frac{du}{u^{1/2}}+3\log\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}\right]$$
$$=4\sqrt{x^2+2x-3}+3\log\left[(x+1)+\sqrt{x^2+2x-3}\right]$$

2. $\int \frac{1-3x}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,dx$ என்ன ?

$$4-3x-x^2=u$$
$$(-3-2x)\,dx=du$$
$$1-3x=\tfrac{3}{2}\,(-2x-3)+\tfrac{11}{2}$$

$$\therefore \int\frac{1-3x}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,dx=\tfrac{3}{2}\int\frac{-(2x+3)}{\sqrt{4-3x-x^2}}\,dx+\tfrac{11}{2}\int\frac{dx}{\sqrt{\frac{25}{4}-(x+\frac{3}{2})^2}}$$
$$=\tfrac{3}{2}\int\frac{du}{u^{1/2}}+\tfrac{11}{2}\sin^{-1}\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{5}{2}}\right)$$
$$=3\sqrt{4-3x-x^2}+\tfrac{11}{2}\sin^{-1}\left(\frac{2x+3}{5}\right)$$

3. $\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ என்ன ?

$$\int\frac{x^2+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int\frac{x^2+4-3}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$$
$$=\int\sqrt{x^2+2^2}\,dx-3\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+2^2}}$$
$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4}+2\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)-3\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$
$$=\tfrac{1}{2}x\sqrt{x^2+4}-\sinh^{-1}\left(\frac{x}{2}\right)$$

மேற் சார்பு இருபடியாகவும், கீழ் சார்பு, இருபடிச் சார்பின் மூலமாகவும் இருக்குமானல் இம் முறையையும் கையாளலாம்.

## பயிற்சிகள் 4 (b)

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$—ஒட்டிய தொகை காண்க.

1. $\frac{1}{x^2+2x+3}$
2. $\frac{2x+3}{x^2+2x+5}$
3. $\frac{3x+1}{2x^2+x+3}$
4. $\frac{x3}{4+2x^4-x^8}$
5. $\frac{x^2-x+1}{1-x-x^2}$
6. $\frac{x^4}{x^2+x+1}$
7. $\frac{1}{\sqrt{2-3x+x^2}}$
8. $\frac{x}{\sqrt{x^2+x+1}}$
9. $\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+x-3}}$
10. $\frac{1}{\sqrt{8+3x-x^2}}$
11. $\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}$
12. $\frac{1}{\sqrt{(a-x)(b+x)}}$
13. $\frac{2x+3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$
14. $\frac{4x-1}{\sqrt{x^2-2x+4}}$
15. $\frac{x^2-x+1}{\sqrt{2x^2-x+2}}$
16. $\frac{x^4}{\sqrt{x^2+x+1}}$
17. $\frac{x^2+2x+3}{\sqrt{x^2+x+1}}$

4·4 பின்னர் வேறு பல **ஈடுசெய்தன்** முறைகள் விளக்கப்படும்.

4·41 I எடுத்துக்காட்டு :

1. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}\,dx$ என்ன ?

கீழே உள்ள இருபடி மூலத்தை நீக்க,

$$x+5 = t^2 \text{ எனக் கொள்க.}$$

அப்போது $x^2 = (t^2-5)^2$ எனவும்

$dx = 2\,tdt$ எனவும் கிடைக்கும்

$$\therefore \int \frac{x^2}{\sqrt{x+5}}\, dx = \int \frac{(t^2-5)^2\, 2\, t dt}{t}$$
$$= 2\int (t^4-10\, t^2+25)\, dt$$
$$= 2\left[ \frac{t^5}{5} - \frac{10\, t^3}{3} + 25\, t \right]$$

இங்கு $t = \sqrt{x+5}$ என ஈடு செய்து தொகை காண்க.

2. $\int \frac{x \quad dx}{(1+x)^{1/3}+(1+x)^{1/2}}$.

இங்கு தோன்றும், இருபடி மூலம், முப்படி மூலம் இரண்டையும் ஒருங்கே நீக்க,

$(1+x) = t^6$ எனக் கொள்க.

அப்போது $(1+x)^{1/3} = t^2$

$(1+x)^{1/2} = t^3$

$dx = 6\, t^5$. ஆகும்.

$$\therefore \int \frac{x\, dx}{(1+x)^{1/3}+(1+x)^{1/2}} = \int \frac{(t^6-1)\; 6\, t^5\, dt}{t^2+t^3}$$
$$= 6\int \frac{t^{11}-t^5}{t^2+t^3}\, dt$$
$$= 6\int \frac{t^9-t^3}{1+t}\, dt$$
$$= 6\int \frac{t^3\,(t^3+1)\,(t^3-1)}{t+1}\, dt$$
$$= 6\int t^3\,(t^3-1)\,(t^2-t+1) dt$$

இங்கு பெருக்கி வந்த சார்பில், உறுப்புறுப்பாய்த் தொகை கண்டு $t = (x+1)^{1/6}$ என ஈடு செய்து தொகை காண்க.

3. $\int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[3]{x}}\, dx$

$x = t^4$ என ஈடு செய்ய,

$\sqrt{x} = t^2$ எனவும்,

$\sqrt[3]{x} = t$ எனவும்

$dx = 4\, t^3$ எனவும் பெறப்படும்

$$\therefore \int \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x}}\, dx = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 4\, t^3\, dt$$

$$= 4 \int \frac{t^5+t^3}{1+t}\, dt$$

$$= 4 \int \left(t^4 - t^3 + 2t^2 - 2t + 2 - \frac{2}{t+1}\right) dt$$

உறுப்புறுப்பாய்த் தொகை கண்டு, $t = \sqrt{x}$ என ஈடு செய்க.

### பயிற்சிகள் 4 (c).

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$ – ஒட்டிய தொகை காண்க.

1. $\dfrac{\sqrt{x}}{1+x}$
2. $\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x+5}}$
3. $\dfrac{x^3}{\sqrt{x-1}}$
4. $\dfrac{1}{x\sqrt{x^3+1}}$
5. $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+6}$
6. $\dfrac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$
7. $\dfrac{1}{(1-x)\sqrt{x}}$
8. $\dfrac{1}{(2x+3)\sqrt{x+5}}$
9. $\dfrac{1}{(x+a)^{1/3}-(x+a)^{1/2}}$
10. $\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{x(1+\sqrt[6]{x})}$

4.42 II (1) $\displaystyle\int \frac{dx}{(x-p)^r\sqrt{ax^2+bx+c}}$ என்ன ?

$x-p = \dfrac{1}{t}$ எனக் கொள்க.

$$dx = -\frac{1}{t^2}\, dt.$$

$$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a\left(\frac{1}{t}+p\right)^2 + b\left(\frac{1}{t}+p\right) + c}$$

$$= \frac{\sqrt{At^2+Bt+K}}{t}$$

$$\therefore \text{தொகை} = -\int \frac{dt}{\dfrac{t^2 \cdot 1}{t^r}\,\dfrac{\sqrt{At^2+Bt+K}}{t}}$$

$$= -\int \frac{t^{r-1}}{\sqrt{At^2+Bt+K}}\, dt$$

இதன் தொகை $\int \frac{f(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$ காணும் முறையில் கண்டுபிடிக்கலாம்.

(2) சிறப்பாக $\int \frac{dx}{(x-p)\sqrt{ax^2+bx+c}}$ காண, சென்ற எடுத்துக் காட்டில் பயன்படுத்திய, ஈடு முறை கொண்டால்,

$$\text{தொகை} = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{At^2+Bt+K}}{t}}$$

$$= -\int \frac{dt}{\sqrt{At^2+Bt+K}}$$

இது முன்னர் 4·22 ல் காட்டப்பட்டதாகும்.

(3) $\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x^2-5x+4}}$

$x+1 = \frac{1}{t}$ என ஈடு செய்தால்,

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt.$$

$$\sqrt{x^2-5x+4} = \sqrt{\left(\frac{1}{t}-1\right)^2-5\left(\frac{1}{t}-1\right)+4}$$

$$= \frac{\sqrt{10t^2-7t+1}}{t}$$

$$\therefore \text{தொகை} = -\int \frac{dt}{t^2 \cdot \frac{1}{t} \cdot \frac{\sqrt{10t^2-7t+1}}{t}}$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{10}}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-\frac{7}{10}t+\frac{1}{10}}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}\int \frac{dt}{\sqrt{\left(t-\frac{7}{20}\right)^2-\left(\frac{3}{20}\right)^2}}$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{10}}\log\left[\left(t-\frac{7}{20}\right)+\sqrt{t^2-\frac{7}{10}t+\frac{1}{10}}\right]$$

இங்கு $t = \frac{1}{x+1}$ என ஈடு செய்து விடை பெறுக.

4·43 III $\int \frac{dx}{(ax^2 + b)\sqrt{px^2 + q}}$ என்ன ?

$x = \frac{1}{t}$ என ஈடு செய்தால்,

$$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$ax^2 + b = \frac{a}{t^2} + b = \frac{a + bt^2}{t^2}$$

$$\sqrt{px^2 + q} = \sqrt{\frac{p}{t^2} + q} = \frac{\sqrt{p + qt^2}}{t}$$

$$\therefore \text{தொகை} = -\int \frac{dt}{t^2\left(\frac{a + bt^2}{t^2}\right)\frac{\sqrt{qt^2 + p}}{t}}$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{(a + bt^2)\sqrt{qt^2 + p}}$$

$p + qt^2 = z^2$ என ஈடு செய்ய,

$2\,qt\,dt = 2\,z\,dz.$

$$\therefore t\,dt = \frac{z}{q}\,dz.$$

$$a + bt^2 = a + \frac{(z^2 - p)\,b}{q}$$

$$= \frac{(aq - bp) + bz^2}{q}$$

$$\therefore\ -\int \frac{t\,dt}{(a + bt^2)\sqrt{p + qt^2}} = -\int \frac{z}{q}\,\frac{dz}{\frac{(aq - bp) + bz^2}{q}} \times \frac{1}{z}$$

$$= -\int \frac{dz}{(aq - bp) + bz^2}.$$

இது $\int \frac{dx}{\pm x^2 \pm a^2}$ அமைப்பாகும்.

அல்லது $\frac{x}{\sqrt{px^2 + q}} = t$ என ஈடு செய்து

$\int \frac{dt}{At^2 + B}$ என்ற அமைப்புக்குக் கொண்டு வரலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)\sqrt{x^2+b^2}}$$

$x = \frac{1}{t}$ என ஈடு செய்க.

$$dx = -\frac{1}{t^2}\,dt$$

$$x^2+a^2 = \frac{1}{t^2}+a^2 = \frac{1+a^2t^2}{t^2}$$

$$\sqrt{x^2+b^2} = \sqrt{\frac{1}{t^2}+b^2} = \frac{\sqrt{1+b^2t^2}}{t}$$

$$\text{தொகை} = -\int \frac{dt}{t^2\,\frac{(1+a^2t^2)}{t^2}\,\frac{\sqrt{1+b^2t^2}}{t}}$$

$$= -\int \frac{t\,dt}{(1+a^2t^2)\sqrt{1+b^2t^2}}$$

$1+b^2t^2 = z^2$ என ஈடு செய்க.

$$t^2 = \frac{z^2-1}{b^2}$$

$$2\,t\,dt = \frac{2z}{b^2}\,dz.$$

$$1+a^2t^2 = 1+\frac{a^2(z^2-1)}{b^2}$$

$$= \frac{(b^2-a^2)+a^2z^2}{b^2}$$

$$\therefore -\int \frac{t\,dt}{(1+a^2t^2)\sqrt{1+b^2t^2}} = -\int \frac{z}{b^2}\cdot\frac{dz}{\frac{[(b^2-a^2)+a^2z^2]}{b^2}}\times\frac{1}{z}$$

$$= -\int \frac{dz}{a^2z^2+(b^2-a^2)}.$$

$b \lessgtr a$ க் குரிய தொகை கண்டு,

$z = \sqrt{1+b^2t^2} = \sqrt{1+\frac{b^2}{x^2}}$ என ஈடு செய்து

தொகை காண்க.

## பயிற்சிகள் 4 (d)

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$– ஒட்டிய தொகை காண்க :

1. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{1-x^2}}$

2. $\dfrac{1}{(x-1)\sqrt{1-x^2}}$

3. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2-1}}$

4. $\dfrac{1}{(x+1)\sqrt{x^2+1}}$

5. $\dfrac{1}{(x-a)\sqrt{x^2-a^2}}$

6. $\dfrac{1}{(1-2x)\sqrt{3x^2+2x+1}}$

7. $\dfrac{1}{(x-1)^2\sqrt{1-x^2}}$

8. $\dfrac{1}{(2x+3)\sqrt{4-x^2}}$

9. $\dfrac{1}{(1+x)\sqrt{1+2x-x^2}}$

10. $\dfrac{1}{x\sqrt{a+2bx+cx^2}}$

11. $\dfrac{1}{(1+x^2)\sqrt{1-x^2}}$

12. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(2-x^2)\sqrt{4-x^2}}$ ன் மதிப்பென்ன ?

13. $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{dx}{(1-2x^2)\sqrt{1-x^2}}$ ன் மதிப்பென்ன ?

14. $\dfrac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2+1}}$

15. $\dfrac{1}{x(x+1)\sqrt{x^2+x-1}}$

4·5

IV. $\int \frac{dx}{a + b\cos x + c\sin x}$ என்ற அமைப்பு :

இது ஒரு முக்கிய அமைப்பாகும்.

இங்கு $\tan\frac{x}{2} = t$ என ஈடு செய்க.

அப்போது $dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

இவ் ஈடுகள் செய்ய,

தொகை $= 2\int \frac{dt}{At^2 + 2ct + B}$

என்ற அமைப்பில் வரும். இங்கு A, B, C ஒட்டி தொகை கண்டு, $t = \tan\frac{x}{2}$ என ஈடு செய்து விடை பெறுக.

சிறப்பாக (i) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\frac{2t}{(1+t^2)}}$

$$= \int \frac{dt}{t}$$

$$= \log \tan\left(\frac{x}{2}\right)$$

(ii) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\,\frac{(1-t^2)}{(1+t^2)}}$

$$= 2\int \frac{dt}{1-t^2}$$

$$= \log\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right)$$

$$= \log\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$

 175040

குறிப்பு : $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)}$

$$= \int \frac{dy}{\sin y} \qquad \left( y = \frac{\pi}{2} + x \text{ ஈடு} \right)$$

$$= \log \tan \frac{y}{2}$$

$$= \log \tan \left( \frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right)$$

இங்குக் கூறப்பட்ட $\tan \frac{x}{2} = t$ என்று ஈடுசெய்தன் முறையில், பின் கூறப்பட்ட அமைப்புகள்,

$$\int \frac{dx}{a+b \cos x}; \qquad \int \frac{dx}{a+b \sin x}; \qquad \int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x}$$

யாவையும் அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டு

(i) $$\int \frac{dx}{3+4\cos x} = \int \frac{2dt}{(1+t^2)\left(3+\frac{4-4t^2}{1+t^2}\right)}$$

$$= \int \frac{2dt}{7-t^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{7}} \log \left\{ \frac{\sqrt{7}+\tan\frac{x}{2}}{\sqrt{7}-\tan\frac{x}{2}} \right\}$$

(ii) $$\int \frac{dx}{5-4\sin x} = \int \frac{2\,dt}{(1+t^2)\left[5-\frac{8t}{1+t^2}\right]};$$

$$= \int \frac{2dt}{5t^2-8t+5}$$

$$= \frac{2}{5} \int \frac{dt}{t^2-\frac{8}{5}t+1}$$

$$= \frac{2}{5} \frac{dt}{(t-\frac{4}{5})^2+(\frac{3}{5})^2}$$

$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{\frac{3}{5}} \tan^{-1} \left( \frac{t - \frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \tan^{-1} \left( \frac{5t - 4}{3} \right)$$

$$= \frac{2}{3} \tan^{-1} \left( \frac{5 \tan\frac{x}{2} - 4}{3} \right).$$

(iii) $$\int \frac{dx}{3 \cos x - 4 \sin x} = \int \frac{2\, dt}{3 - 8t - 3t^2}$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{1 - \frac{8}{3}t - t^2}$$

$$= \frac{2}{3} \int \frac{dt}{(\frac{5}{3})^2 - (t + \frac{4}{3})^2}$$

$$= \frac{1}{5} \log \left( \frac{3 + \tan\frac{x}{2}}{\frac{1}{3} - \tan\frac{x}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{5} \log \left( \frac{9 + 3 \tan\frac{x}{2}}{1 - 3 \tan\frac{x}{2}} \right)$$

(iv) $\int \frac{dx}{5 \cos 2x + 12 \sin 2x}$ என்ன ?

இங்கு $\tan x = t$ என ஈடு செய்க.

$\sec^2 x\, dx = dt$

$$\therefore \quad dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

$$\sin 2x = \frac{2t}{1 + t^2}$$

$$\cos 2x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$$

$$\therefore \text{ தொகை } = \int \frac{dt}{(1+t^2)\left[\dfrac{5-5t^2}{1+t^2} + \dfrac{24t}{1+t^2}\right]}$$

$$= \int \frac{dt}{5+24t-5t^2}$$

$$= \int \frac{dt}{(1+5t)(5-t)}$$

$$\frac{1}{5+24t-5t^2} \equiv \frac{A}{1+5t} + \frac{B}{5-t}$$

$$1 \equiv A(5-t) + B(1+5t)$$

$$t = 5 : \quad 1 = 26\,B$$

$$B = \frac{1}{26}$$

$$t = -\tfrac{1}{5} : 1 = \frac{26}{5}\,A$$

$$A = \frac{5}{26}$$

$$\therefore \int \frac{dt}{(1+5t)(5-t)} = \int \left[\frac{5}{26(1+5t)} + \frac{1}{26(5-t)}\right] dt$$

$$= \frac{1}{26} \log \left(\frac{1+5t}{5-t}\right)$$

$$= \frac{1}{26} \log \left(\frac{1+5\tan x}{5-\tan x}\right)$$

குறிப்பு : பொதுவாக $\displaystyle\int \frac{dx}{A\cos mx + B\sin mx + C}$

என்பது காண, $\tan \dfrac{mx}{2} = t$ என ஈடு செய்யவேண்டும்.

அப்போது $\dfrac{m}{2} \sec^2 \dfrac{mx}{2}\, dx = dt$

$$dx = \frac{2}{m(1+t^2)}$$

$$\sin mx = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos mx = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

அப்போது தொகை $= \int \dfrac{2\,dt}{m\,(1+t^2)\left[\dfrac{A\,(1-t^2)}{(1+t^2)} + \dfrac{B\cdot 2t}{1+t^2}\right]} + C$

$$= \frac{2}{m}\int \frac{dt}{A^1\,t^2 + 2B\,t + (C + A)}$$

என வரும். இதற்குத் தொகை கண்டு, $t = \tan\dfrac{mx}{2}$ என ஈடு செய்ய, விடை பெறப்படும்.

(v) $\displaystyle\int \frac{5\cos x + \sin x}{2\cos x + 3\sin x}\,dx$

இங்கு ஒரு தனி முறை கையாண்டால், தொகை எளிதில் கிடைக்கும்.

$2\cos x + 3\sin x = u$ எனக் கொள்க.

$$-2\sin x + 3\cos x = \frac{du}{dx}.$$

இப்போது

$$5\cos x + \sin x = A\,(2\cos x + 3\sin x) + B\,(-2\sin x + 3\cos x)$$

$$= Au + B\frac{du}{dx}$$

எனக் கொண்டு, A, B கண்டு பிடிக்கவேண்டும்.

A, B காண,

$2A + 3B = 5$

$3A - 2B = 1$ என்ற சமன்பாடுகள் வரும்.

இவைகளின் தீர்வு, $A = 1,\ B = 1$

$$\therefore\ 5\cos x + \sin x = u + \frac{du}{dx}$$

$$\therefore \text{ தொகை } = \int \frac{u + \dfrac{du}{dx}}{u}\,dx$$

$$= \int dx + \int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{dx}\,dx$$

$$= x + \log u$$

$$= x + \log\,(2\cos x + 3\sin x)$$

4·6 V. ஒரு தொகையும், அதோடு இணைந்த தொகையும் (Related Integrals).

$P = \int e^{ax}\cos bx\,dx$ எனக் கொண்டால்,

அதற்கு இணைந்த தொகையாக,

$Q = \int e^{ax} \sin bx\, dx$ என்பது அமையும்.

அவ்வாறே

$$P = \int x^n \cos ax\, dx$$

$$Q = \int x^n \sin ax\, dx$$

இரண்டும் இணைந்த தொகைகளாகும்.

பொதுவாக,

$$P = \int f(x) \cos ax\, dx$$

$Q = \int f(x) \sin ax\, dx$ என்ற இரண்டையும் இணைந்த தொகைகளுக்கு ஓர் எடுத்துக்காட்டாக வைத்துக் கொள்ளலாம்.

இணைந்த தொகைகளெனின், இரண்டினையும் உடனுடனே அறிய முடியும்.

எடுத்துக்காட்டாக :

$$P = \int e^{ax} \cos bx\, dx$$

$$Q = \int e^{ax} \sin bx\, dx$$

என்ற இரு தொகைகளையும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

$$P + iQ = \int e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)\, dx$$

$$= \int e^{ax} . e^{ibx}\, dx$$

$$= \int e^{(a+ib)x}\, dx$$

$$= \frac{1}{a+ib} e^{(a+ib)x}$$

$$= \frac{a-ib}{a^2+b^2} e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$$

இங்கு P= வலப் பக்கத்தின் மெய்ப்பகுதி.

$iQ$= வலப் பக்கத்தின் கற்பனைப்பகுதி

வலப் பக்கத்தை, மெய், கற்பனைப் பகுதிகளாகப் பிரித்து எழுதினால்

$$\text{வலப் பக்கம்} = \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \cos bx + b \sin bx)$$

$$+ \ i . \frac{1}{a^2+b^2} e^{ax} (a \sin bx - b \cos bx)$$

$$\therefore \quad P = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \sin bx)$$

$$Q = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \sin bx - b \cos bx)$$

இவைகளையே,

$$P = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{ax} \cos (bx - \alpha)$$ எனவும்,

$$Q = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} e^{ax} \sin (bx - \alpha)$$ எனவும்

எழுதலாம்.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{b}{a}\right)$$ ஆகும்.

## பயிற்சிகள் 4 (e)

கீழ்க்கண்ட சார்புகளின் $x$— ஒட்டிய தொகை காண்க.

1. $\dfrac{1}{4 + 5 \cos x}$
2. $\dfrac{1}{13 + 12 \cos x}$
3. $\dfrac{1}{4 + 5 \sin x}$
4. $\dfrac{1}{1 + \sin x}$
5. $\dfrac{1}{2 \cos x + 3 \sin x}$
6. $\dfrac{1}{1 + 3 \sin x + 4 \cos x}$
7. $\dfrac{1}{1 + \tan x}$
8. $\dfrac{1}{1 + \cot x}$
9. $\dfrac{1}{4 + 3 \sin 2x}$
10. $\dfrac{1}{13 + 5 \cos mx}$
11. $\dfrac{1 + 2 \sin x}{1 + 3 \sin x}$
12. $\dfrac{3 \cos x + 2 \sin x}{\cos x - \sin x}$
13. $\dfrac{\cos x + \sin x}{2 \cos x - 3 \sin x}$
14. $\dfrac{1}{3 \sin 4x + 4 \cos 4x}$

பின்கண்ட வரையறைத் தொகையை மதிப்பிடுக :

15. $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{1 + \cos \alpha \sin 2x}$ ($\alpha$—ஒரு மாறிலி).

16. $$\int_0^a \frac{dx}{\cos a + \cos x} = \operatorname{cosec} a \log \sec a$$

என நிறுவுக.

17. $$\int_0^\pi \frac{dx}{1 - 2a\cos x + a^2} = \frac{\pi}{1-a^2} \text{ அல்லது } \frac{\pi}{a^2-1}$$

என நிறுவுக. (முறையே $a \lessgtr 1$ எனக் கொள்க).

18. $$\int \frac{dx}{\sin x\,(1 + \sin x)} = \sec x - \tan x - \log(\operatorname{cosec} x + \cot x)$$

என நிறுவுக.

19. $$\int_0^\pi \frac{dx}{a^2 - 2ab\cos x + b^2} = \frac{\pi}{a^2 - b^2} \quad \text{அல்லது} \quad \frac{\pi}{b^2 - a^2}$$

என நிறுவுக. (முறையே $a > b > o;\ b > a > o$).

20. $\tan\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\tan\frac{u}{2}$ என ஈடு செய்து;

$$\int \frac{dx}{(1 + e\cos x)^2} = \frac{1}{(\sqrt{1-e^2}\,)^3}(u - e\sin u)$$

என நிறுவுக.

பகுதி 5

# தொகை காணும் வழி-வகைகள்

(தொடர்ச்சி)

## 5·1 தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணல் :

ஒரு சார்பின் தொகை காணும் முயற்சியில், அச் சார்பின் தொகை, ஒன்று அல்லது இரண்டு (அல்லது பல) வரிசை அல்லது படி குறைவாக உள்ள அதேபோன்ற மற்றோர் சார்பின் தொகையாக அமையுமானால், நமக்கு ஒரு **சுருக்க வாய்பாடு** (அல்லது சூத்திரம்) கிடைக்கும். இந்த முறையை, ஒரு தடவை அல்லது பல தடவை பயன்படுத்தினால் நாம் எளிதில் அறியக்கூடிய ஒரு தொகை கிடைக்கலாம். இம் முறைக்குத் **தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணல்** முறை என்று பெயர்.

5.11 இதை ஒரு முக்கியமான எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

$I_n = \int \sin^n x\, dx$ எனக் கொள்க.

இங்கு $n$ ஒரு கூட்டு முழு எண் எனவும் கொள்க.

இங்கு, சினைகள் பிரித்துத் தொகை காணல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$
\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x\ dx \\
&= \int \sin^{n-1} x\ \sin x\ dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x - \int -\cos x\,(n-1)\sin^{n-2} x\cos x\, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x\cos^2 x\, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x)\, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int (\sin^{n-2} x - \sin^n x)\, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\,[I_{n-2} - I_n]
\end{aligned}
$$

பகுதி ၁

# தொகை காணும் வழி-வகைகள்

(தொடர்ச்சி)

**5·1 தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணல் :**

ஒரு சார்பின் தொகை காணும் முயற்சியில், அச் சார்பின் தொகை, ஒன்று அல்லது இரண்டு (அல்லது பல) வரிசை அல்லது படி குறைவாக உள்ள அதேபோன்ற மற்றோர் சார்பின் தொகையாக அமையுமானல், நமக்கு ஒரு **சுருக்க வாய்பாடு** (அல்லது சூத்திரம்) கிடைக்கும். இந்த முறையை, ஒரு தடவை அல்லது பல தடவை பயன்படுத்தினல் நாம் எளிதில் அறியக்கூடிய ஒரு தொகை கிடைக்கலாம். இம் முறைக்குத் **தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணல் முறை** என்று பெயர்.

5.11 இதை ஒரு முக்கியமான எடுத்துக்காட்டால் விளக்குவோம்.

$I_n = \int \sin^n x \, dx$ எனக் கொள்க.

இங்கு $n$ ஒரு கூட்டு முழு எண் எனவும் கொள்க.

இங்கு, சினைகள் பிரித்துத் தொகை காணல் முறையைப் பயன்படுத்துவோம்.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int \sin^n x \, dx \\
&= \int \sin^{n-1}x \sin x \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x - \int -\cos x \, (n-1) \sin^{n-2}x \cos x \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2}x \cos^2 x \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1)\int \sin^{n-2} x(1-\sin^2 x) \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) \int (\sin^{n-2}x - \sin^n x) \, dx \\
&= -\cos x \cdot \sin^{n-1} x + (n-1) [I_{n-2} - I_n]
\end{aligned}$$

வலப் பக்கமுள்ள $-(n-1)$ $I_n$ ஐ இடப் பக்கம் கொண்டு வர,

$$n\,I_n = -\cos x \cdot \sin^{n-1}x + (n-1)\,I_{n-2} \qquad (1)$$

அதாவது

$$I_n = \frac{-\cos x \cdot \sin^{n-1}x}{n} + \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} \qquad (2)$$

இதுவே சுருக்க வாய்பாடாகும்.

இங்கு $\int \sin^n x\,dx$ என்பது $\int \sin^{n-2}x\,dx$ என்பதைச் சார்ந்திருக்கும் நிலை வெளிப்படுகிறது. மேலும், இச் சுருக்க வாய்பாட்டை, $(n-2)$, $(n-4)$, .... என்ற $\sin x$-ன் படிகளுக்குப் பயன்படுத்தினுல்,

$$I_{n-2} = \frac{-\cos x \,.\, \sin^{n-3}x}{n-2} + \frac{n-3}{n-4}\,I_{n-4} \qquad (3)$$

$$I_{n-4} = \frac{-\cos x \,.\, \sin^{n-5}x}{n-4} + \frac{n-5}{n-4}\,I_{n-6} \qquad (4)$$

என்று தொடர்ந்து நமக்கு வாய்பாடுகள் கிடைக்கின்றன.

தொடர்ந்து பயன்படுத்தும்போது, கடைசியாக,

$n$ ஒரு இரட்டைப் படை எண்ணுனல்

$$I_2 = \frac{-\cos x \sin x}{2} + \tfrac{1}{2}\,I_0 \text{ எனவும்} \qquad (5)$$

$n$ ஒரு ஒற்றைப்படை எண்ணுனல்

$$I_3 = \frac{-\cos x \sin^2 x}{3} + \tfrac{1}{2}\,I_1 \text{ எனவும்} \qquad (6)$$

கிடைக்கும்.

(5)-ல் உள்ள
$$\begin{aligned} I_0 &= \int (\sin x)^0\,dx \\ &= \int dx \\ &= x. \end{aligned} \qquad (7)$$

(6)-ல் உள்ள
$$\begin{aligned} I_1 &= \int \sin x\,dx \\ &= -\cos x \end{aligned} \qquad (8)$$

(1), (2), (3), (4), (5) அல்லது (6) வாய்பாடுகளைக் கொண்டு, $n$-க்கு எந்தக் கூட்டு முழு எண் மதிப்பு இருப்பினும் $I_n$ யாது என அறியலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$I_5 = \sin^5 x$ என்ன ?

சுருக்க வாய்பாடு (2)ன் படி,

$$I_5 = \frac{-\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5} I_3.$$

$$I_3 = \frac{-\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int \sin x dx = -\cos x.$$

இவைகளை முறையாக $I_5$ல் ஈடு செய்தால்,

$$I_5 = \frac{-\cos x \sin^4 x}{5} + \frac{4}{5}\left[\frac{-\cos x \sin^2 x}{3} + \frac{2}{3}(-\cos x)\right]$$

$$= \frac{-\cos x \sin^4 x}{5} - \frac{4}{15} \cos x \sin^2 x - \frac{8}{15} \cos x.$$

இவ்வாறே,

$$\int \sin^4 x dx = I_4 = \frac{-\cos x \sin^3 x}{4} + \tfrac{3}{4} I_2$$

$$I_2 = \frac{-\cos x \sin x}{2} + \tfrac{1}{2} I_0$$

$$I_0 = x$$

$$\therefore I_4 = \frac{-\cos x \sin^3 x}{4} + \tfrac{3}{4}\left[\frac{-\cos x \sin x}{2} + \tfrac{1}{2} x\right]$$

$$= \frac{-\cos x \sin^3 x}{4} - \tfrac{3}{8} \cos x \sin x + \tfrac{3}{8} x.$$

5·12 மற்றோர் எடுத்துக்காட்டு :

$I_n = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$ என்ன ?

$n$ ஒரு கூட்டு முழு எண் எனக் கொள்க.

இங்கு :

$$I_n = \int 1 \cdot \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} - \int \frac{x(-n)2x}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int \frac{x^2+a^2-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\, dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\int\left[\frac{1}{(x^2+a^2)^n} - \frac{a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}\right] dx$$

$$= \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + 2n\, I_n - 2na^2\, I_{n+1}$$

$$\therefore \quad 2na^2\, I_{n+1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^n} + (2n-1)\, I_n$$

என்ற தொடர்ச்சுருக்க வாய்பாடு கிடைக்கிறது. $n$-க்குப் பதிலாக, $(n-1)$ ஈடு செய்தால்,

$$2(n-1)a^2\, I_n = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + (2n-3)\, I_{n-1}$$

என்ற சுருக்க வாய்பாடு கிடைக்கும்.

இங்கு $I_n$ தொகை, $I_{n-1}$ தொகையோடு இணைக்கப்பட்டு, அதைச் சார்ந்து இருக்கிறது. இதிலிருந்து நமக்கு அடுத்துக் கிடைக்கும் வாய்பாடு,

$$2(n-2)\ a^2\, I_{n-1} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-2}} + (2n-5)\ I_{n-2}$$

தொடர்ச்சியாக எழுதினுல்

$$2\,(2-1)\ a^2\, I_2 = \frac{x}{(x^2+a^2)} + I_1$$ கிடைக்கும்

$$I_1 = \int \frac{dx}{(x^2+a^2)}$$

$$= \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)$$

வந்தவழியே திரும்பிச் செல்ல, $I_2$, $I_3$,............முதலியன கிடைக்கும்.

## 5·2 தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணல் :

### பல்வேறு சார்புகள்.

இந்த முறையில், $n$ ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுனால், $\sin^n x$; $\cos^n x$, $\tan^n x$, $\cot^n x$, $\sec^n x$, $\operatorname{cosec}^n x$ என்ற சார்புகளின் தொகை காணலாம்.

1. $I_n = \int \sin^n x \ dx$ முன்னர் செய்யப்பட்டிருக்கிறது.

தொடர் வாய்பாடு

$$I_n = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (1)$$

2. $I_n = \int \cos^n x \ dx$

$$= \int \cos^{n-1} x \ \cos x \ dx$$
$$= \sin x \ \cos^{n-1} x - \int \sin x \ (n-1) \ \cos^{n-2} x \ (-\sin x) \ dx$$
$$= \sin x \ \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \ \sin^2 x \ dx$$
$$= \sin x \ \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \ (1-\cos^2 x) \ dx$$
$$= \sin x \ \cos^{n-1} x + (n-1) \ [I_{n-2} - I_n]$$

$$\therefore \ n I_n = \sin x \ \cos^{n-1} x + (n-1) \ I_{n-2}$$

∴ தொடர் வாய்பாடு

$$I_n = \frac{\sin x \ \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} I_{n-2} \quad (2)$$

தொடர்ந்து, வாய்பாடு வழியாகத் தொகைகள் எழுதி வரும் போது கடைசியாக,

$n =$ ஓர் இரட்டைப்படைக் கூட்டு முழு எண்ணுனால்

$$I_2 = \frac{\sin x \ \cos x}{2} + \tfrac{1}{2} I_0$$

$$I_0 = \int (\cos x)^0 \ dx$$
$$= x. \text{ எனவும்}$$

$n =$ ஓர் ஒற்றைப்படைக் கூட்டு முழு எண்ணுனால்

$$I_3 = \frac{\sin x \ \cos^2 x}{3} + \tfrac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int \cos x \ dx$$
$$= \sin x \text{ எனவும்}$$

கிடைக்கப் பெறும்.

$$3.\ I_n = \int \tan^n x\, dx$$
$$= \int \tan^{n-2}x \tan^2 x\, dx$$
$$= \int \tan^{n-2}x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \int \tan^{n-2}x \sec^2 x\, dx - I_{n-2}$$
$$= \frac{\tan^{n-1}x}{n-1} - I_{n-2}$$

இதுவே தொடர்வாய்பாடாகும். (3)

தொடர்ந்து, வாய்பாடு வழியாகத் தொகைகள் எழுதி வரும்போது, கடைசியாக,

$n$ = ஓர் இரட்டைப்படைக் கூட்டு முழு எண்ணுனல்

$$I_2 = \tan x - I_0$$
$$I_0 = \int (\tan x)^0\, dx$$
$= x$ எனவும்

$n$ = ஓர் ஒற்றைப்படைக் கூட்டு முழு எண்ணுனல்

$$I_3 = \frac{\tan^2 x}{2} - I_1$$
$$I_1 = \int \tan x\, dx$$
$= \log \sec x$ எனவும் கிடைக்கப்பெறும்.

(4) இவ்வாறே,

$$I_n = \int \cot^n x\, dx$$
$$= -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - I_{n-2}$$ எனவும் (4)

$$I_2 = -\cot x - I_0$$
$I_0 = x$ எனவும்

$$I_3 = -\frac{\cot^2 x}{2} - I_1$$
$I_1 = \log \sin x$ எனவும் பெறப்படும்.

(5) $$I_n = \int \sec^n x\, dx$$
$$= \int \sec^{n-2} x \sec^2 x\, dx$$
$$= \tan x \sec^{n-2} x - \int \tan x (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x\, dx$$
$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1)\, dx$$
$$= \tan x \sec^{n-2} x - (n-2) [I_n - I_{n-2}]$$

$\therefore \; (n-1)\; I_n = \tan x \sec^{n-2} x + (n-2)\; I_{n-2}$ தொடர் வாய்பாடு,

$$I_n = \frac{\tan x \;\sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} I_{n-2}.$$

தொடர்ந்து, வாய்பாடு வழியாகத் தொகைகள் எழுதி வரும்போது, கடைசியாக,

$n =$ ஓர் இரட்டைப்படை கூட்டு முழு எண்ணுல்,

$I_2 = \tan x$ எனவும்,

$n =$ ஓர் ஒற்றைப்படை கூட்டு முழு எண்ணுல்,

$$I_3 = \frac{\tan x \sec x}{2} + \frac{1}{2} I_1$$

$$I_1 = \int \sec x \, d\, x$$

$$= \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right)$$ எனவும் கிடைக்கப்பெறும்.

(6) இவ்வாறே,

$$I_n = \int \operatorname{cosec}^n x \, dx$$

$$= \int \operatorname{cosec}^{n-2} x \operatorname{cosec}^2 x \, dx$$ என எழுதி

$$I_n = -\frac{\cot x \;\operatorname{cosec}^{n-2} x}{n-1} + \frac{(n-2)}{(n-1)} I_{n-2} \qquad (6)$$

எனவும்

$I_2 = -\cot x$ எனவும்,

$$I_3 = -\frac{\cot x \;\operatorname{cosec} x}{2} + \frac{1}{2} I_1,$$

$$I_1 = \int \operatorname{cosec} x \, dx$$

$$= \log \tan \left(\frac{x}{2}\right)$$ எனவும் பெறப்படும்.

(7) இப்போது

$I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$\int \sin^m x \cos x \, dx = \dfrac{\sin^{m+1} x}{m+1}$ என்று நமக்குத் தெரியும்.

$$\therefore I_{m,n} = \int \sin^m x \cos x \, . \, \cos^{n-1} x \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-1} x - \int \frac{\sin^{m+1}}{m+1} (n-1)\cos^{n-2} x \, (-\sin x) \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x \, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \, (1-\cos^2 x) \cos^{n-2} x dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} [I_{m,n-2} - I_{m,n}]$$

வலப் பக்கம் இருக்கும் $I_{m,n}$ உறுப்பை இடப் பக்கம் கொணர்ந்தால்,

$$\left(1 + \frac{n-1}{m+1}\right) I_{m,n} = \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{m+1} I_{m,n-2}$$

$$\therefore (m+n) \, I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{m,n-2} \quad (7)$$

என்ற தொடர் வாய்பாடு கிடைக்கும்.

$$\therefore I_{m,n} = \frac{1}{m+n} \left[ \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) \, I_{m,n-2} \right] \quad (7)$$

தொடர்ந்து, வாய்பாடு வழியாகத் தொகைகள் எழுதி வரும்போது,

$$I_{m,n-2} = \frac{1}{m+n-2} \left[ \sin^{m+1} x \cos^{n-3} x + (n-3) \, I_{m,n-4} \right]$$

$$I_{m,n-4} = \frac{1}{m+n-4} \left[ \sin^{m+1} x \cos^{n-5} x + (n-5) \, I_{m,n-6} \right]$$

— — — — — —

— — — — — — —.

கடைசியாக

$n =$ ஓர் இரட்டைப்படை கூட்டு முழு எண்ணானல்,

$$I_{m,2} = \frac{1}{m+2} \left[ \sin^{m+1} x \cos x + I_{m,0} \right]$$

$$I_{m,0} = \int \sin^m x \, dx.$$

இது முன்னர் (1)ல் பெறப்பட்டது.

$n =$ ஓர் ஒற்றைப்படை கூட்டு முழு எண்ணானால்,

$$I_{m,3} = \frac{1}{m+3}\left[\sin^{m+1}x \cos^2 x + 2\, I_{m,1}\right]$$

$$I_{m,1} = \int \sin^m x \cos x\, dx$$

$$= \frac{\sin^{m+1}x}{m+1}$$

ஆகவே $m, n$ கூட்டு முழு எண்களானால், தொடர்ச்சியாக (7) ஆம் வாய்பாடு பயன்படும்.

குறிப்பு :

இங்கு $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x\, dx$

$$= \int \sin^{m-1}x \cos^n x \sin x\, dx$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\sin^{m-1}x - \int \frac{-\cos^{n+1}x}{n+1}(m-1)\sin^{m-2}x \cos x\, dx$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^{n+2}x \sin^{m-2} dx$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{n+1}\int \cos^n x \cos^2 x \sin^{m-2}x\, dx$$

$$= -\frac{\cos^{n+1}x}{n+1}\sin^{m-1}x + \frac{m-1}{n+1}\left[I_{m-2,n} - I_{m,n}\right]$$

என எழுதி,

$I_{m,n}$ ஒடு $I_{m-2,n}$ ஐ இணைத்துத் தொடர் வாய்பாடு காணலாம்.

5·3 வேறு சில தொடர்த் தொகை வாய்பாடுகள் :

1. $$I_n = \int e^{ax} x^n \, dx$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} . x^n - \int \frac{1}{a} e^{ax} . nx^{n-1} dx$$
$$= \frac{1}{a} e^{ax} . x^n - \frac{n}{a} I_{n-1}. \qquad (1)$$
$$\therefore \quad a I_n = e^{ax} . x^n - n I_{n-1} \qquad (1)$$

2. $$I_{m, n} = \int x^m (\log x)^n dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\log x)^n - \int \frac{x^{m+1}}{m+1} n (\log x)^{n-1} . \frac{1}{x} dx$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} (\log x)^n - \frac{n}{m+1} I_{m, n-1} .$$

— — — — — — — . .

$$I_{m, 1} = \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{1}{m+1} \int x^m dx .$$
$$= \frac{x^{m+1}}{m+1} \log x - \frac{x^{m+1}}{(m+1)^2} . \qquad (2)$$

3. $$I_n = \int x^n \cos ax \, dx$$
$$= \frac{1}{a} \sin ax . x^n - \int \frac{1}{a} \sin ax . nx^{n-1} dx$$
$$= \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx$$
$$= \frac{x^n}{a} \sin ax - \frac{n}{a} \Big[ - \frac{1}{a} \cos ax . x^{n-1} - \int - \frac{1}{a} \cos ax \, (n-1) x^{n-2} dx$$
$$= \frac{x^n}{a} \sin ax + \frac{n}{a^2} x^{n-1} \cos ax - \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$
$$\therefore \quad a^2 I_n = ax^n \sin ax + nx^{n-1} \cos ax - n(n-1) I_{n-2} \qquad (3)$$

இவ்வாறே $\int x^n \sin ax \, dx$-ம் அறியலாம்.

4. $I_{m,n} = \int \cos^m x \sin nx\, dx$

$$= -\frac{\cos nx}{n}\cos^m x - \int -\frac{\cos nx}{n} m \cos^{m-1} x\,(-\sin x)\, dx$$

$$= -\frac{\cos nx}{n}\cos^m x - \frac{m}{n}\int \cos nx \sin x \,.\, \cos^{m-1} x\, dx$$

$\sin (n-1) x = \sin nx \cos x - \cos nx \sin x$ என நமக்குத் தெரியும்.

$\therefore\ \cos nx \sin x = \sin nx \cos x - \sin (n-1) x.$ இதை முன் கண்ட தொகையில் ஈடு செய்தால்,

$$I_{m,n} = -\frac{\cos nx}{n}\cos^m x - \frac{m}{n}\int \left[\sin nx \cos x - \sin (n-1)x\right] \cos^{m-1} x\, dx$$

$$= -\frac{\cos nx}{n}\cos^m x - \frac{m}{n}\left[\int (\cos^m x \sin nx - \cos^{m-1} x \sin(n-1)x) dx\right]$$

$$= -\frac{\cos nx}{n}\cos^m x - \frac{m}{n}\left[I_{m,n} - I_{m-1,n-1}\right]$$

$I_{m,n}$ உறுப்பை வலப் பக்கமிருந்து இடப் பக்கம் கொணர்ந்தால்,

$$\left(1 + \frac{m}{n}\right) I_{m,n} = -\frac{\cos nx}{n}\cos^m x + \frac{m}{n} I_{m-1,n-1}$$

$$\therefore\ (m + n)\, I_{m,n} = -\cos nx \cos^m x + m\, I_{m-1,n-1} \qquad (4)$$

இங்கு $m = n$ ஆனல்,

$$2n\, I_{n,n} = -\cos nx \cos^n x + n\, I_{n-1,n-1}. \qquad (4a)$$

தொடர்ந்து எழுதிவரும்போது,

$$\left.\begin{aligned} 2I_{1,1} &= -\cos^2 x + I_{0,0} \\ I_{0,0} &= \int (\cos x)^0 \sin 0\, dx \\ &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (4b)$$

எனக் கிடைக்கும்.

4(a), 4(b) பயன்படுத்தி

$\int_0^{\pi/2} \cos^n x \sin nx \, dx$ என்னவெனக் காண்போம்.

$$I_{n,n} = \frac{1}{2n}\Big[-\cos nx \cos^n x\Big]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n} \cdot n \, I_{n-1,\,n-1}$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2} I_{n-1,\,n-1}$$

$$\therefore I_{n-1,\,n-1} = \frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2} I_{n-2,\,n-2}.$$

— — — — — — — — —

$$I_{2,2} = \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2} I_{1,1}$$

$$I_{1,1} = \int_0^{\pi/2} \cos x \sin x \, dx$$

$$= \tfrac{1}{2}$$

$$\therefore I_{n,n} = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2(n-1)} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2(n-2)} \cdots\cdots + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{4}\right]\right.$$

$$= \frac{1}{2n} + \frac{1}{2^2(n-1)} + \frac{1}{2^3(n-2)} + \cdots \frac{1}{2^{n-2}\cdot 3}$$

$$+ \frac{1}{2^{n-1}\cdot 2} + \frac{1}{2^n \cdot 1}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left[2 + \frac{2^2}{2} + \frac{2^3}{3} + \cdots \frac{2^n}{n}\right]$$

5. $I_n = \int e^{ax} \cos^n x \, dx$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos^n x - \int \frac{1}{a} e^{ax} n \cos^{n-1} x \, (-\sin x) \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos^n x + \frac{n}{a} \int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x \, dx.$$

இப்போது

$$\int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x$$

$$- \int \frac{1}{a} e^{ax} [(n-1) \cos^{n-2} x (-\sin x) \sin x + \cos^{n-1} x \cos x] \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{a}$$

$$\int e^{ax} \cos^{n-2} x \sin^2 x \, dx - \frac{1}{a} \int e^{ax} \cos^n x \, dx.$$

வலப்புறமுள்ள இரண்டாவது உறுப்பு.

$$= \frac{n-1}{a} \int e^{ax} \cos^{n-2} x (1 - \cos^2 x) \, dx.$$

$$= \frac{n-1}{a} \int (e^{ax} \cos^{n-2} x - e^{ax} \cos^n x) \, dx$$

$$\therefore \int e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x \, dx$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{a} [I_{n-2} - I_n] - \frac{1}{a} I_n$$

$$\therefore I_n = \frac{1}{a} e^{ax} \cos^n x + \frac{n}{a}$$

$$\left[ \frac{e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x}{a} + \frac{n-1}{a} (I_{n-2} - I_n) - \frac{1}{a} I_n \right]$$

$I_n$ உறுப்புகளெல்லாம் இடக் கைப்புறம் கொணர்ந்தால்

$$I_n \left[ 1 + \frac{n(n-1)}{a^2} + \frac{n}{a^2} \right]$$

$$= \frac{1}{a} e^{ax} \cos^n x + \frac{n}{a^2} e^{ax} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}$$

$$\therefore \quad I_n \left( 1 + \frac{n^2}{a^2} \right)$$

$$= \frac{e^{ax}}{a} \left[ \cos^n x + \frac{n}{a} \cos^{n-1} x \sin x \right] + \frac{n(n-1)}{a^2} I_{n-2}.$$

$\therefore (n^2 + a^2)\ I_n$

$= e^{ax} \cos^{n-1} x\ [a \cos x + n \sin x] + n\ (n-1)\ I_{n-2}$

இதுவே தொடர் வாய்பாடு.

இவ்வாறே, $I_n = \int e^{ax} \sin^n x\, dx$ தொடர் வாய்பாடும் அறியலாம்.

## பயிற்சிகள் 5 (a)

கீழ்க்கண்டவைகளின் $x$ — ஒட்டிய தொகை காண்க:—

1. $\sin^4 x$.
2. $\cos^4 x$.
3. $\tan^3 x$.
4. $\cos^5 x$.
5. $\sec^4 x$.
6. $\mathrm{cosec}^6 x$
7. $\tan^3 x \sec^5 x$.
8. $(\tan x + \cot x)^3$.
9. $\cot^8 x\ \mathrm{cosec}^4 x$.

## பயிற்சிகள் 5 (b)

1. $\int e^{ax} \sin bx\, dx$-ன் மதிப்பு கண்டு, அதைத் தொடர்ந்து $\int x^n e^{ax} \sin bx\, dx$ எப்படிக் காணலாம் என விளக்குக.

அவ்வழியாக,

(i) $$\int_0^{\pi} x\, e^{2x} \sin x\, dx = \frac{e2\pi}{25}(5\pi - 4) - \frac{4}{25}$$ எனவும்,

(ii) $$\int_0^{1} x^2 e^x \sin \pi x\, dx = \frac{\pi}{(1+\pi^2)^3}\left[e\,(3 - 4\pi^2 + \pi^4) - 2\pi^2 + 6\right]$$

எனவும் நிறுவுக.

2. $I_n = \int \sin x \,.\, x^n\, dx$ ஆனால்,

$I_n = -x^n \cos x + nx^{n-1} \sin x - n\ (n-1)\ I_{n-2}$

என நிறுவுக.

அவ்வழியாக, $\int x^3 \sin x\, dx$ மதிப்பிடுக.

3. $I_{m,n} = \int \frac{x^m \, dx}{(\log x)^n}$ ஆனால்,

$$I_{m,n} = \frac{-x^{m+1}}{(n-1)(\log x)^{n-1}} + \left(\frac{m+1}{n-1}\right) I_{m,n-1}$$ என நிறுவுக.

4. $\int x^n \sqrt{ax^2 + bx + c} \; dx$-க்கு ஒரு தொடர்த் தொகை வாய்பாடு அறிக.

5. $f(m, n) = \int x^m (1-x)^n \, dx$ ஆனால்,

$$(m+n+1) \; f(m, n) = x^{m+1}(1-x)^n + nf(m, n-1)$$

என நிறுவுக.

பின்பு, $m, n$ என்பவை கூட்டு முழு எண்களாயின்,

$$\int_0^1 x^m (1-x)^n \, dx = \frac{\lfloor m \;\; \lfloor n}{\lfloor m+n+1}$$ என நிறுவுக.

6. $I_n = \int_0^1 x^p (1-x^q)^n \, dx$ ஆனால்,

$(nq + p + 1) \; I_n = nq \; I_{n-1}$ என நிறுவுக
($p, q, n$ யாவும் $> 0$ எனக் கொள்க).

7. $I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \sin^n x \, dx$ ஆனால்,

$(1 + n^2) \; I_n = n(n-1) \, I_{n-2}$ என நிறுவுக.

அவ்வழியே,

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin^4 x \, dx = \frac{24}{85}$$ என நிறுவுக.

அவ்வாறே,

$I_n = \int_0^{\infty} e^{-x} \cos^n x \, dx$-க்கு ஒரு தொடர் வாய்பாடு காண்க.

8. $I_n = \int_0^{2a} x^n \sqrt{2ax - x^2}\, dx$ ஆனுல்,

$$I_n = \frac{2n+1}{n+2}\, a\, I_{n-1}$$ என நிறுவுக.

பின்பு $\int_0^{2a} x\sqrt{2ax - x^2}\, dx$ மதிப்பிடுக.

9. $I_n = \int_0^{\pi/2} x \sin^n x\, dx$ ஆனுல்,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} + \frac{1}{n^2}$$ என நிறுவுக $(n>1)$.

$$I_5 = \frac{149}{225}$$ என்று காட்டுக.

10. $I_{m,n} = \int_0^{\pi/2} \cos^m x \cos nx\, dx$ ஆனுல்,

$$I_{m,n} = \frac{m(m-1)}{m^2-n^2}.\ I_{m-2,n}$$ என நிறுவுக.

இங்கு $n$ ஒரு கூட்டு முழு எண்ணுனுல்,

$$\int_9^{\pi/1} \cos^n x \cos n x\, dx = \frac{\pi}{2^{n+1}}$$ என நிறுவுக

11. $\phi(n) = \int_0^{\pi/4} \tan^n x\, dx$ ஆனுல்,

$$\phi(n) + \phi(n-2) = \frac{1}{n-1}$$ என நிறுவி

$\phi(5)$ன் மதிப்பறிக.

12. $\phi(n) = \int x^n \sqrt{a^2 - x^2}\, dx$ ஆனுல்,

$$(n+2)\,\phi(n) = -x^{n-1}(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}} + (n-1)\,a^2\,\phi(n-2)$$

என நிறுவுக.

# பகுதி 6

# வரையறுத்த தொகை
## [Definite Integral]

**6·1** $\int f(x)\,dx$ என்பது ஒரு கூட்டுத் தொகையென்றும் $\int$ என்ற குறியீடே S (Sum — கூட்டுத் தொகை) என்பதன் சிதைவென்றும் முதலில் கூறினேம். இன்னும் சற்று நுட்பமாக அதை ஆராய்வோம்.

**6.2** அதற்குரிய அடிப்படையான தேற்றம் பின் வருமாறு :

**தேற்றம் :** $f(x)$ என்னும் சார்பு $(a, b)$ இடையே ஒரு தொடர்ச்சியான சார்பு ; $a, b$ இரண்டும் குறிப்பிட்ட எண்கள்; $n$ ஒரு கூட்டு முழு எண்; $h = \dfrac{b - a}{n}$ ; $n \longrightarrow \infty$ ஆனல், $h \longrightarrow o$ ; இந்தக் கட்டுப்பாடுகளுக்கு அடங்கி, $\int f(x)\,dx = F(x) + c$ ஆனல்,

$$\underset{n \longrightarrow o}{\text{எல்லை}}\; h \left[ f(a) + f(a+h) + \cdots f(a + \overline{n-1}\,h) \right]$$

$\doteq F(b) - F(a)$ என நிறுவுக.

தெரிப்பு : கொடுத்த வரையறைப்படி,

$$\underset{h \longrightarrow o}{\text{எல்லை}}\; \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$$

எனவே, $h$ ஒரு மிகச் சிறிய எண்ணனல்,

$$\frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x) + \varepsilon \qquad (1)$$

ε-ம் ஒரு மிகச் சிறிய எண் ; $h \longrightarrow 0$ ஆனல் $\varepsilon \longrightarrow 0$ தொடர்ந்து, $x$-க்கு, $a$, $a+h$, $a+2h$, ........... $a+\overline{n-1}\,h$ என (1)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$F(a+h) - F(a) = h\,[f(a) + \varepsilon_1]$$

$$F(a+2h) - F(a+h) = h\,[f(a+h) + \varepsilon_2]$$

$$F(a+3h) - F(a+2h) = h\,[f(a+2h) + \varepsilon_3]$$

— — — — — — —

$$F(a+\overline{r+1}h) - F(a+rh) = h\,[f(a+rh) + \varepsilon_{n+1}]$$

— — — — — — —

$$F(a) + nh) - F(a+\overline{n-1}h) = h\,[f(a+\overline{n-1}h) + \varepsilon_n].$$

இவை யாவையும் கூட்டிச் சமன் செய்தால்,

$$F(a+nh) - F(a) = h\,[f(a) + f(a+h) + \ldots + f(a+\overline{n-1}h)] + h\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n) \quad (2)$$

$\dfrac{b-a}{h} = n$ ஆகையால், $b = a + nh$

மேலும் $h \longrightarrow 0$ ஆகும்போது, $\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, . . . $\varepsilon_n$ எல்லாம் $0$ எல்லையை நாடும்.

$$\therefore F(b) - F(a) = h\,[f(a) + f(a+h) + \ldots f(a+\overline{n-1}\,h)] + h\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n) \quad (3)$$

$\varepsilon_1$, $\varepsilon_2$, . . . $\varepsilon_n$ என்பவைக்குள் $\varepsilon_r$ என்பதற்கு எண் மதிப்பு, அதாவது $|\varepsilon r|$, மீப்பெரு மதிப்பாக விருக்கட்டும்.

அப்போது,

$$h\,|\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n| \leq h\,n\,|\varepsilon_r|$$
$$\leq (b-a)\,|\varepsilon r|.$$

ஆனல் $h \longrightarrow 0$ ஆடும்போது, $\varepsilon_1$ $\varepsilon_2$, . . $\varepsilon r$, . . $\varepsilon_n$ யாவும் $0$ எல்லையை நாடும்.

எனவே, $\varepsilon_r$ ம் $0$ எல்லையை நாடும்.

எனவே, $(b-a)\,|\varepsilon_r|$-ம் $0$ எல்லையை நாடும். ஆகவே, $h\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots \varepsilon_n)$-ம் $0$ எல்லையை நாடும்.

எனவே, $h \longrightarrow 0$ ஆகும்போது,

$$\underset{h \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}}\ h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots f(a+\overline{n-1}h)\right] = F(b) - F(a).$$

**குறிப்பு.**—இத் தேற்றத் தெரிப்பில் இன்னும் சில நுணுக்கங்கள் உள்ளன; அவை இம் முதல் நூலுக்கு அதிகமானது என்று விடப்பட்டன.

எனவே, இத் தேற்றத்தின் முடிவை,

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$ என்று எடுத்துக்கொள்ளுகிறோம். $F(b) - F(a)$-ன் மதிப்பு, வரையறுத்த தொகையெனக் கூறப்படும்.

இதை வரையறைத் தொகையெனவும் பின்னர் சுருக்கமாகக் கூறப்படும்.

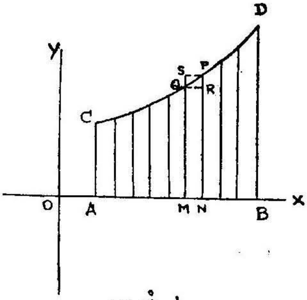
**6·3 பரப்புகள் :** சென்ற தேற்றத்தைக் கொண்டு சில பரப்புகள் கண்டறியலாம்.

$y = f(x)$ என்பதின் வளைவரை CD

AC, BD என்பவை, $x = a$, $x = b$ என்ற இடங்களில் உயர்த்தப்பட்ட குத்தாயங்கள்.

ABDC என்ற பரப்பு காண முற்படுவோம்;

அதாவது $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கும், $x$-அச்சுக்கும், $x = a$, $x = b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு காண முற்படுவோம்.



படம் - 1

AB என்ற நீளத்தை, $n$ சம பாகங்களாகப் பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு பகுதியும் $h$–அகலம் உள்ளதெனக் கொள்வோம்.

அதாவது $b - a = nh$

$OM = a + rh$; $ON = a + \overline{r+1}h$ எனக் கொண்டால் $MN = h$.

M, N என்ற இடங்களில் உயர்த்தப்பட்ட குத்தாயங்கள், $y = f(x)$ என்ற வளைவரையை Q, P என்ற இடங்களில்

சந்திக்கட்டும். Q வழியாக QR-ம்; P வழியாக PS-ம், $x$ அச்சுக்கு ஒருபோகுடைய கோடுகளாக வரையப் பட்டிருக்கின்றன.

வெள்ளிடையுண்மையாக (Axiom) நீள்சதுரப் பரப்பு

MNRQ < பரப்பு MNPQ

< நீள் சதுரப் பரப்பு MNPS என்று வைத்துக்கொள்வோம்.

எனவே,

$hf(a+rh) <$ பரப்பு MNPQ $< hf(a+\overline{r+1}h)$ இதே மாதிரியாக மற்றக் குத்தாயங்களையொட்டிய பரப்புகளுக்கும் நாம் எழுதுவோமாஞல்,

$$h[f(a)+f(a+h)+\ldots f(a+\overline{n-1}h)].$$

< பரப்பு ABDC

$$< h[f(a+h)+f(a+2h)+\ldots f(a+nh)].$$

கடைசியாகக் கூறப்பட்டது

$$h[f(a)+f(a+h)\ldots\ldots f(a+\overline{n-1}h)]+h[f(a+nh)-f(a)] \quad (1)$$

க்குச் சமமாகும்.

$n\longrightarrow\infty$ ஆனல், $h\longrightarrow o$ ஆகும். அப்போது

$$h[f(a+nh)-f(a)] = h[f(b)-f(a)] \longrightarrow o$$

எனவே,

$$\text{எல்லை}_{h\to o}\, h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

< பரப்பு ABDC

$$< \text{எல்லை}_{h\to o}\, h\left[f(a)+f(a+h)+\ldots f(a+\overline{n-1}h)\right]$$

$$+ \text{எல்லை}_{h\to o}\, h\left[f(b)-f(a)\right]$$

$h\longrightarrow o$ ஆகும்போது $h[f(b)-f(a)]\longrightarrow o$

∴ பரப்பு ABDC $= F(b)-F(a)$

$$=\int_a^b f(x)\,dx$$

அதாவது பரப்பு ABDC $= \text{எல்லை}_{h\longleftarrow 0}\, h\sum_{r=0}^{r=n-1} f(a+rh)$

b

பொதுவாக $\int_a^b \Phi(x)\,dx = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{r=n-1} h\,\Phi(a+rh).$

தேற்றத்தில் கூறப்பட்ட கட்டுப்பாடுகள் யாவும் $\Phi(x)$ என்ற சார்புக்குப் பொருந்தும்.

6·4. 6·2-இல் நிறுவப்பட்ட தேற்றம் மிக முக்கியம் வாய்ந்தது. இத் தேற்றத்தைக் கூட்டுத் தொகை முதல் விதி எனக் கொள்வோம்.

இவ் விதியின் அடிப்படையில், சில கூட்டுத் தொகைகள் காண்போம்.

6·4.1. கூட்டுத்தொகை முதல் விதிப்படி, $\int_a^b x^2\,dx$-இன் மதிப்புக் காண்க.

$$\int_a^b x^2\,dx = \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\, h \left[ a^2 + (a+h)^2 + \ldots (a+\overline{n-1}h)^2 \right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}}\, h \left[ na^2 + h^2 (1^2 + 2^2 + \ldots \overline{n-1}^2) + h(2a + 4a + \ldots \overline{2n-1}a \right]$$

$$= \underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \left[ nh\,a^2 + h^3 . \frac{(n-1)\,n\,(2n-1)}{6} + \ldots h^2 . 2a . \frac{(n-1)\,n}{2} \right]$$

இங்கு $\frac{b-a}{n} = h$

அதாவது $nh = b - a$

$\therefore$ வலக் கைப்புறம் =

$$\underset{h\to 0}{\text{எல்லை}} \quad (b-a)\,a^2 + \frac{n^3h^3 \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6} + ah^2 n^2 \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$h \to 0$ ஆகும்போது $n \to \infty$. அதாவது $\frac{1}{n} \to 0$

∴ வலக் கைப்புறம்

$$= (b - a)\, a^2 + \frac{(b-a)^3\, 2}{6} + a\,(b-a)^2$$

$$= (b - a)\left[ a^2 + \frac{(b-a)^2}{3} + a\,(b - a) \right]$$

$$= \frac{(b-a)}{3}\left[ 3a^2 + b^2 + a^2 - 2ab + 3ab - 3a^2 \right]$$

$$= \frac{b-a}{3} \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

$$= \frac{b^3 + a^3}{3}$$

இதுவே $\displaystyle\int_a^b x^2\, dx = \left[ \frac{x^3}{3} \right]_a^b$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3}$$

**குறிப்பு.**—சில எளிய சார்புகளுக்கே இம் முறையில் வரையறுத்த தொகை காண முடியும். வழியும் நீளமானது. களைப்புத் தட்டக்கூடியது. ஆனால், அறிவுக்கு நல்ல தீட்டுக் கல். நுண்கணிதம் இன்றை நிலைக்கு வளர்வதற்கு முன்பு, இம் முறைப்படியே, பரப்பு, பருமம் முதலியன காணப் பட்டன.

6·5. **தொடர்க் கூட்டல் :** வரையறுத்த தொகை என்பது ஒரு கூட்டல் மதிப்பின் எல்லையென்ற முதல் விதிப்படி (6·2). சில குறிப்பிட்ட கூட்டுத் தொடர்களின் கூட்டுத் தொகையை யறியலாம்.

முன்னர் 6·2-இல் காட்டியபடி

$$\text{எல்லை}_{n \to \infty} \sum_{r=0}^{n-1} h\left[f(a + rh)\right] = \int_a^b f(x)\, dx \; ; \qquad (1)$$

இங்கு $h = \frac{b-a}{n}$ என எடுத்துக்கொள்ளப்பட்டது.

நடைமுறையில் $a$, $b$ என்ற எல்லைகளுக்குப் பதிலாக, 0, 1 என்ற எல்லைகளுக்கு மாற்றி எல்லை காண்பது மரபு.

$a = 0, b = 1$ எனவும், $h = \frac{1}{n}$ எனவும், கொண்டால், முன் கூறப்பட்டது, (1)

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{r=n-1} \frac{1}{n}\left[ f\left(\frac{r}{n}\right)\right] = \int_0^1 f(x)\, dx \text{ ஆகும்.}$$

கொடுக்கப்பட்ட தொடர் பின் கூறப்படும் சில பண்புகள் பெற்றிருக்கவேண்டும்.

(1) $\frac{1}{n}$ என்ற சினை, ஒவ்வொரு உறுப்பிலும் ஒரு சினையாக அமைய வேண்டும்.

(2) உறுப்புக்கள் $\frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right)$ என்ற அமைப்பில் இருக்க வேண்டும்.

(3) உறுப்புக்கள் $r = 0, 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots$ என்ற தொடர்ச்சியான மதிப்புக்கள் பெற்ற உறுப்புக்களாக இருக்க வேண்டும்.

4. மொத்தம் $n$ உறுப்புக்கள் இருக்கவேண்டும். ஒன்றிரண்டு குறைவாக விருப்பினும் அவை எல்லையை பாதிக்காது. அதாவது, $k$, $l$ குறிப்பிட்ட அளவுக்குட்பட்ட முழு எண்களாயின்,

$$\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=k}^{r=n+l} \frac{1}{n} f\left(\frac{r}{n}\right) = \int_0^1 f(x)\, dx.$$

6·51 எடுத்துக் காட்டு.

(1) $\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2\right]$ என்ன ?

$r$-வது உறுப்பு $\frac{r^2}{n^3} = \frac{1}{n}\left(\frac{r}{n}\right)^2$

$$\therefore \text{ வேண்டிய எல்லை } = \underset{n \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n}\left(\frac{r}{n}\right)^2$$

$$= \int_0^1 x^2\, dx$$

$$= \frac{1}{3}.$$

(2) $$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{n}{n}\right) \right\}^{1/n}$$

என்ன ?

இதன் எல்லை A எனக் கொண்டால்,

$$\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \log_e A = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \frac{1}{n}\left[\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \dots \log\left(1 + \frac{n}{n}\right)\right]$$

$$r\text{-வது உறுப்பு} = \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$\therefore \quad \text{வேண்டிய எல்லை} = \underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=1}^{n} \frac{1}{n} \log\left(1 + \frac{r}{n}\right)$$

$$= \int_0^1 \log(1 + x)\, dx.$$

$$= \Big[x \log(1 + x)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{1 + x}\, dx.$$

$$= \log 2 - \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1 + x}\right) dx$$

$$= \log 2 - [x - \log(1 + x)]_0^1$$

$$= \log 2 - [(1 - \log 2) - (0 - 0)]$$

$$= 2 \log 2 - 1$$

$$= \log 4 - 1.$$

log என்பது வேறொன்றும் குறிப்பிடாத வரை $e$ என்ற மட்டத்திற்கே உரியதாகும்.

$$\therefore \log A = \log 4 - 1$$

$$\therefore A = e^{(\log 4 - 1)}$$

$$= \frac{4}{e}$$

## பயிற்சிகள் 6.

வரையறைப்பட்ட தொகை, ஒரு தொடர்க் கூட்டலின் எல்லை எனக்கொண்டு பின் வருவனவற்றை மதிப்பிடுக :

1. $\int_a^b x\, dx.$ 2. $\int_a^b e^x\, dx.$

3. $\int_a^b \sin x\, dx.$ 4. $\int_a^b \frac{dx}{x^2}$

கீழ்க்கண்ட தொடர்க் கூட்டல்களில், $n \longrightarrow \infty$ எனக் கொண்டு எல்லையை மதிப்பிடுக :

5. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{n+n}.$

6. $\frac{n^2}{n^3} + \frac{n^2}{(n+1)^3} + \ldots + \frac{n^2}{(n+n)^3}.$

7. $\underset{n \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \sum_{r=o}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{n^2 - r^2}}$

8. $\frac{1^2}{1^3 + n^3} + \frac{2^2}{2^3 + n^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3 + n^3}$

9. $\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \ldots + \frac{1}{3n}$

10. $\underset{n \to \infty}{\text{எல்லை}} \left[\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2^2}{n^2}\right) \ldots\ldots \left(1 + \frac{n^2}{n^2}\right)\right]^{1/n} = 2\, e^{\frac{\pi - 4}{2}}$ என் நிறுவுக.

பகுதி 7

# வரையறைத் தொகை

## பண்புகள்

7·1. $\int f(x)\,dx = F(x)$ ஆனால், அதாவது

$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x)$ ஆனால்,

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ என்பது கொள்கை.

$\int_a^b f(x)\,dx$ என்பது, $a$-க்கும் $b$-க்கும் இடையே $f(x)$ என்ற சார்பின் வரையறைத் தொகை எனப்படும்.

$a, b$ இரண்டும் முறையே, கீழ் எல்லை, மேல் எல்லை எனப்படும். $a$ முதல் $b$ வரையுள்ள இடைவெளி, தொகைக்குரிய கட்டம் (Range) எனப்படும்.

இங்கு $F(x)$-ம் $F(x) + C$-ம் வரையறைப்படாத தொகை என்று கூறலாம். இந்த வரையறைப்படாத தொகையைக் கூட, வரையறைப்பட்ட தொகையமைப்பிலிட்டும் கூறலாம். எவ்வாறெனின்,

$$F(x) + C = \int_a^x f(x)\,dx = F(x) - F(a); \qquad \text{இங்கு}$$

$C = -F(a)$ என்ற ஒரு மாறிலி ஆகும்.

7·2 **வரையறைத் தொகையின் முக்கிய பண்புகள் :**

$\int f(x)\,dx = F(x) + C$ எனக் கொண்டால்

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$ என நாம் அறிவோம்.

பண்பு (1) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(y)\,dy = \int_a^b f(t)\,dt.$

ஏனெனில் எல்லாம் $F(b) - F(a)$-க்குச் சமம்.

பண்பு (2) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

$$\text{வலது கைப்புறம்} = -\int_b^a f(x)\,dx$$
$$= -[F(a) - F(b)]$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

பண்பு (3) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

ஏனெனில் வலது கைப்புறம்
$$= F(c) - F(a) + F(b) - F(c)$$
$$= F(b) - F(a)$$
$$= \int_a^b f(x)\,dx.$$

இதை விரிவுபடுத்துவோமானல்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{c_1} f(x)\,dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)\,dx + \int_{c_2}^{c_3} f(x)\,dx + \ldots + \int_{c_n}^{b} f(x)\,dx$$

பண்பு (4) $\int_0^a f(x)\,dx = \int_0^a f(a-x)\,dx.$

இங்கு $a - x = t$ எனக்கொண்டால்,
$-dx = dt$ ஆகும்.

எல்லைகள் : $x = o$ ஆனல் $t = a$ ஆகும்
$x = a$ ஆனல் $t = o$ ஆகும்

$$\text{எனவே} \int_0^a f(a-x)\,dx = -\int_a^0 f(t)\,dt$$
$$= \int_0^a f(t)\,dt \quad [\text{பண்பு } (2)]$$
$$= \int_0^a f(x)\,dx \quad [\text{பண்பு } (1)]$$

இப்பண்பின் கிளைப்பண்பாக,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(a+b-x)\,dx$$ என நிறுவலாம்.

இங்கு $a+b-x=t$ என ஈடு செய்தால், எளிதில் கிடைக்கும்.

**பண்பு** *(5)* (i) $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பாக விருப்பின்,

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(ii) $f(x)$ ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பாக விருப்பின் $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx.$

* கீழ்க்கண்ட குறிப்பில் ஒற்றை, இரட்டைப்படைச் சார்புகள் விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

(i) $f(x) = -f(-x)$ : ஒற்றைப்படைச்சார்பு :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$ எனப் பிரித்தெழுதலாம் [பண்பு (3)].

---

*குறிப்பு:

$f(-x) = -f(x)$ ஆனால், $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பெனவும்,

$f(-x) = f(x)$ ஆனால், $f(x)$ ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பெனவும் கூறப்படும். ஒற்றைப்படைச் சார்பு எடுத்துக் காட்டு:

(1) $f(x) = x^3$

$f(-x) = -x^3$

$\therefore\ f(-x) = -f(x).$

(ii) $f(x) = \sin mx$

$f(-x) = \sin(-mx)$

$= -\sin mx$

$\therefore\ f(-x) = -f(x).$

இப்போது $\int_{-a}^{0} f(x)\,dx$ எடுத்துக் கொள்வோம்.

$x = -y$ என ஈடு செய்க.

அப்போது $dx = -dy$

எல்லைகள் : $x = -a$ ஆனால் $y = a$

$x = 0$ ஆனால் $y = 0$

$$\therefore \int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)(-dy)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy$$

$$= -\int_{a}^{0} -f(y)\,dy \quad [f(y) = -f(-y) \text{ ஒற்றைப்படைச் சார்பு}].$$

$$= \int_{a}^{0} f(y)\,dy$$

$$= -\int_{0}^{a} f(y)\,dy \quad [\text{பண்பு } (2)]$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad [\text{பண்பு } (1)]$$

---

இரட்டைப்படைச்சார்பு எடுத்துக்காட்டு :

(i) $f(x) = x^4 - 3x^2 + 3$

$f(-x) = (-x)^4 - 3(-x)^2 + 3$

$= x^4 - 3x^2 + 3$

$\therefore f(-x) = f(x).$

(ii) $f(x) = \cos x$

$f(-x) = \cos(-x)$

$= \cos x$

$\therefore f(-x) = f(x).$

(iii) $f(x) = \sin^{2n} x$ ($n$ கூட்டு முழு எண்)

$f(-x) = [\sin(-x)]^{2n}$

$= (-\sin x)^{2n}$

$= \sin^{2n} x.$

$\therefore f(-x) = f(x).$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= -\int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx = 0$$

(ii) $f(x) = f(-x)$ ; இரட்டைப்படைச் சார்பு, பழைய ஈடுசெய் முறையிலேயே,

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = \int_{a}^{0} f(-y)\,(-dy)$$

$$= -\int_{a}^{0} f(-y)\,dy$$

$$= -\int_{a}^{0} f(y)\,dy. \text{ [இரட்டைப்படைச் சார்பு]}$$

$$= \int_{0}^{a} f(y)\,dy \quad \text{[பண்பு (2)]}$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx \quad \text{[பண்பு (1)]}$$

$$\therefore \int_{-a}^{a} f(x)\,dx = \int_{-a}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= \int_{0}^{a} f(x)\,dx + \int_{0}^{a} f(x)\,dx$$

$$= 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

பண்பு *(6)* (i) $f(x) = -f(2a - x)$ ஆனல்

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 0$$

(ii) $f(x) = f(2a - x)$ ஆனல்

$$\int_{0}^{2a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx.$$

$$\text{(i)} \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

எனப் பிரித்தெழுதலாம். [பண்பு (3)]

இப்போது $\int_a^{2a} f(x)\,dx$ எடுத்துக்கொள்வோம்.

$x = 2a - y$ என ஈடு செய்க.

$dx = -dy$ ஆகும்.

எல்லைகள் : $x = a$ ஆனல், $y = a$

$x = 2a$ ஆனல், $y = 0$

$$\therefore \int_a^{2a} f(x)\,dx = \int_a^{0} f(2a-y)\,(-dy)$$

$$= -\int_a^{0} f(2a-y)\,dy$$

$$= \int_0^{a} f(2a-y)\,dy$$

$$= -\int_0^{a} f(y)\,dy \quad \left[\begin{array}{l}\text{கொடுக்கப்பட்டது}\\ f(x) = -f(2a-x)\end{array}\right]$$

$$= -\int_0^{a} f(x)\,dx \quad \text{[பண்பு(1)]}$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^{a} f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^{a} f(x)\,dx - \int_0^{a} f(x)\,dx$$

$$= 0$$

(ii) $f(x) = f(2a - x)$ எனக் கொள்வோம். முன் செய்யப்பட்ட ஈடு செய்தால்,

$$\int_a^{2a} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(2a-y)\,dy.$$

$$= \int_0^a f(2a-y)\,dy$$

$$= \int_0^a f(y)\,dy \left[\begin{array}{c}\text{கொடுக்கப்பட்டது} \\ f(x) = f(2a-x)\end{array}\right]$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx \text{ [பண்பு (1)]}$$

$$\therefore \int_0^{2a} f(x)\,dx = \int_0^a f(x)\,dx + \int_a^{2a} f(x)\,dx$$

$$= \int_0^a f(x)\,dx + \int_0^a f(x)\,dx$$

$$= 2\int_0^a f(x)\,dx.$$

பண்பு (6) பின்கண்ட அமைப்புள்ள சார்புகளில் பயன் படும்.

(i) $\pi = 2a$ எனக்கொண்டால்

$f(\sin x) = f[\sin(\pi - x)]$

எனவே

$$\int_0^{\pi} f(\sin x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\sin x)\,dx.$$

(ii) $f(x)$ ஒரு ஒற்றைப்படைச் சார்பாயின்,

$f(\cos x) = f[\cos(\pi - x)]$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx = 0.$$

(iii) $f(x)$ ஒரு இரட்டைப்படைச் சார்பாயின்,

$f(\cos x) = -f[\cos(\pi - x)]$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(\cos x)\,dx = 2\int_0^{\pi/2} f(\cos x)\,dx.$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

$$\text{(i)} \int_0^{\pi} \sin^n x\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

$$\text{(ii)} \int_0^{\pi} \cos^{2n+1} x\, dx = 0$$

$$\text{(iii)} \int_0^{\pi} \cos^{2n} x\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} x\, dx$$

$$\text{(iv)} \int_0^{\pi} \sin^m x \cos^{2n} x\, dx = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^{2n} x\, dx$$

$$\text{(v)} \int_0^{\pi} \sin^m x \cos^{(2n+1)} x\, dx = 0$$

## திட்ட அமைப்பு—வரையறுத்த தொகைகள்

7·31 $\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$. இங்கு $n$ ஒரு கூட்டு முழு எண்.

முன்னர் தொடர்ச்சியாகத் தொகை காணும் முறையில் காட்டியதையொட்டி,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx$$

$$= -\left.\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \sin^{n-2} x\, dx$$

$$= 0 + \frac{n-1}{n} I_{n-2}$$

எனவே, 0 முதல் $\frac{\pi}{2}$ வரையில், வரையறுத்த தொகை,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \qquad (1)$$

$$\therefore \quad I_{n-2} = \frac{n-3}{n-2} I_{n-4}$$

$$I_{n-4} = \frac{n-5}{n-4} I_{n-6}$$

.................................... (A)

....................................

$n$ ஒரு ஒற்றைப்படையெண்ணுயின்,

$$I_3 = \tfrac{2}{3} I_1$$

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

$$= \Big[-\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= 1$$

எனவே, இடது கைப்புற உறுப்புக்களுக்கு, முறையாக உரிய வலது கைப்புற உறுப்புக்களை ஈடு செய்து, பெருக்கினுல்

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \tfrac{2}{3} \cdot 1 \qquad (2a)$$

$n$ ஒரு இரட்டைப்படையெண்ணுயின்,

$$I_2 = \tfrac{1}{2} I_0$$

$$I_0 = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^0 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}.$$

எனவே, முறையாக ஈடு செய்ய,

$$I_n = \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-3}{n-2} \cdots\cdots \tfrac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} \qquad (2b)$$

(2a) (2b) என்ற வாய்பாடுகளை ஒருங்கமைத்து,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx = \frac{(n-1)\,(n-3)\,\cdots\cdots}{n\,(n-2)\,(n-4)\,\cdots\cdot} \times k\,;$$

$n$ ஒற்றைப்படை கூட்டு முழு எண் ஆனுல் $k = 1$ ;

$n$ இரட்டைப்படை கூட்டு முழு எண் ஆனுல் $k = \frac{\pi}{2}$ ;

என்று பொது வாய்பாடு பெறுகிறேம்.

7·32. இதே முறையில் $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\, dx$-ம் பெறலாம்.

ஆனல் $\int_0^a f(x)\, dx = \int_0^a f(a - x)\, dx$ என்ற பண்புப்படி,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x\right) dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx.$$

எனவே சென்ற பத்தியில் கடைசியாகக் கண்ட பொது வாய்பாடு, இரண்டிற்கும் பொருந்தும்.

அதாவது,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^n x\, dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\ \ldots\ldots}{n(n-2)(n-4)\ \ldots} \times k$$

$n$ ஒரு ஒற்றைப்படை கூட்டு முழு எண் ஆனல் $k = 1$;

$n$ ஒரு இரட்டைப்படை கூட்டு முழு எண் ஆனல் $k = \frac{\pi}{2}$.

எளிய எடுத்துக் காட்டுகள்:

$$\text{(i)}\ \int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, dx = \frac{4\ .\ 2}{5\ .\ 3\ .\ 1} = \frac{8}{15} = \int_0^{\pi/2} \cos^5 x\, dx$$

$$\text{(ii)}\ \int_0^{\pi/2} \cos^8 x\, dx = \frac{7\ .\ 5\ .\ 3\ .\ 1}{8\ .\ 6\ .\ 4\ .\ 2} \cdot \frac{\pi}{2} = \int_0^{\pi/2} \sin^8 x\, dx.$$

7·33. $I_{m,n} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x\, dx$ $\left[\begin{array}{c} m, n \text{ கூட்டு முழு} \\ \text{எண்கள்.} \end{array}\right]$

முன்னர் 5·2 (7)-ல்
கண்டதையொட்டி,

$$I_{m,n} = \left[\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+n}\right]_0^{\pi/2} + \frac{n-1}{m+n} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^{n-2} x\, dx$$

$$= 0 + I_{m,n-2}\left(\frac{n-1}{m+n}\right)$$

$$\therefore \quad I_{m,n} = \frac{n-1}{m+n} I_{m,n-2} \qquad (1)$$

அவ்வாறே,

$$I_{m,n-2} = \frac{n-3}{m+n-2} I_{m,n-4}$$

$$I_{m,n-4} = \frac{n-5}{m+n-4} I_{m,n-6} \qquad (A)$$

. . . .

$n$ ஒரு ஒற்றைப்படை கூட்டு முழு எண்ணாயின்

$$I_{m,3} = \frac{2}{m+3} I_{m,1}$$

$$I_{m,1} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos x\, dx$$

$$= \left[\frac{\sin^{m+1} x}{m+1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{m+1}$$

எனவே, இடது கைப்புற உறுப்புக்களுக்கு, முறையாக உரிய வலது கைப்புற உறுப்புக்களை ஈடு செய்து, பெருக்கினால்,

$$I_{m,n} = \frac{(n-1)(n-3)(n-5) \ldots\ldots 2}{(m+n)(m+n-2) \ldots\ldots (m+3)} \cdot \frac{1}{m+1}.$$

$$= \frac{(n-1)(n-3) \ldots \times 2 \times 1}{(m+n)(m+n-2) \ldots (m+3)(m+1)} \cdot \frac{(m-1)(m-3) \ldots}{(m-1)(m-3) \ldots}$$

2 (a)

ஏன் கீழெண்ணையும் மேலெண்ணையும், $(m-1)(m-3)\ldots$ ஆல் பெருக்குகிறோம் என்பது பின்னர் விளக்கப்படும்.

$n$ ஒரு இரட்டைப்படை முழு எண்ணுயின்,

$$I_{m,2} = \frac{1}{m+2} I_{m,o}.$$

$$I_{m,o} = \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, (\cos x)^0 \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^m x \, dx$$

$$= \frac{(m-1)(m-3)\ldots}{m(m-2)\ldots} \times k$$

$m$ ஒரு ஒற்றைப்படை கூட்டு முழு எண்ணுனல் $k = 1$;

$m$ ஒரு இரட்டைப்படை கூட்டு முழு எண்ணுனல் $k = \frac{\pi}{2}$. 2 (b)

(2a) (2b) என்ற வாய்பாடுகளை ஒருங்கமைத்தால்,

$$\int_0^{\pi/2} \sin^m x \cos^n x \, dx$$

$$= \frac{(n-1)(n-3)\ldots\ldots(m-1)(m-3)\ldots\ldots}{(m+n)(m+n-2)\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \times k$$

$m, n$ இரண்டும் இரட்டைப்படை கூட்டு முழு எண்களாயின் $k = \frac{\pi}{2}$; இல்லையேல் (அதாவது ஏதாமொன்ருே, அல்லது இரண்டுமோ, ஒற்றைப்படைக் கூட்டு முழு எண்ணுயின்) $k = 1$. (3)

இது மிகவும் பயனுள்ள ஒரு பொது வாய்பாடு.

குறிப்பு.—$I_{m,n} = I_{n,m}$ என எளிதில் அறியலாம்.

எளிய எடுத்துக்காட்டுகள் :

(i) $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \cos^4 x \, dx = \frac{3 \cdot 1 \cdot 2}{7 \cdot 5 \cdot 3} \times 1 = \frac{2}{35}$.

$$\text{(ii)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \cos^4 x \, dx = \frac{3 \,.\, 1 \,.\, 5 \,.\, 3 \,.\, 1}{10 \,.\, 8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{(iii)} \quad \int_0^{\pi/2} \sin^5 x \cos^3 x \, dx = \frac{2 \,.\, 4 \,.\, 2}{8 \,.\, 6 \,.\, 4 \,.\, 2} \times 1.$$

இங்கும் வரையறுத்த தொகைப் பண்புகள் 7·2, (5)-ம் (6)-ம் கொண்டு,

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx\text{-ம்} \qquad \int_0^{2\pi} \sin^m x \cos^n x \, dx\text{-ம்}$$

கணக்கிடலாம். ஆனால் சற்று விழிப்புடன் $\sin^m x \cos^n x$-ன் பண்பினை ஆராய்ந்தறியவேண்டும்.

**7·331. $I_{m,\,n}$ வாய்பாட்டை செயல்படுத்தும் முறை:** sin $x$-க்கோ cos $x$-க்கோ உள்ளபடியை எடுத்துக்கொள்ள வேண்டும். அதிலிருந்து,

*(1) ஒன்று குறைத்து முதல் சினையாக எழுதவும் ;*

*(2) பிறகு முதல் சினையினின்று இரண்டு இரண்டாகக் குறைத்து, அவ்வரிசையில் கடைசி கூட்டு முழு எண் சினை வரும் வரை எழுதவும் ;*

*(3) பிறகு மற்றோர் படியையெடுத்து, ஒன்று குறைத்து முதல் சினையாக எழுதவும்;*

*(4) (2)-ல் கூறிய முறைப்படி, அச்சினையைப் பயன்படுத்தவும்.*

இவையெல்லாம் மேலெண் *(**Numerator**)* சினைகள்.

*(5) பிறகு இரண்டு படிகளையும் கூட்டி, கீழெண்ணின் (**Denominator**) முதற் சினையாக எழுதவும் ;*

*(6) அக் கூட்டுத் தொகையினின்று, இரண்டு, இரண்டாகக் குறைத்து, அவ்வரிசையில் கடைசி கூட்டு முழு எண் சினை வரும் வரை எழுதவும் ;*

இவையெல்லாம் கீழெண் (Denominator) சினைகள்.

(7) $\frac{\text{மேலெண்}}{\text{கீழெண்}}$ மதிப்பு காணவும்;

(8) $m, n$ இரண்டும் இரட்டைப் படை கூட்டு முழு எண் களாயில் (7)ல் கண்ட மதிப்பை $\frac{\pi}{2}$ ஆல் பெருக்கவும்; இல்லேயேல், (7)-ல் கண்ட மதிப்பை 1 ஆல் பெருக்கவும், அதாவது அப்படியே விடவும்.

7·4 சில பயனுள்ள குறிப்புக்கள் :

(i) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^n x\, d x = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^n x\, d x$ [$n$ — கூட்டு முழு எண்].

(ii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2m} x\, d x = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^{2m} x\, d x$ [$m$ — கூட்டு முழு எண் $2m$ — இரட்டைப் படை]

(iii) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\pi/2} \sin^{2m+1} x\, d x = 0$

(iv) $\int_0^{\pi} \cos^{2m} x\, d x = 2 \int_0^{\pi/2} \cos^{2m} x\, d x.$

(v) $\int_0^{\pi} \cos^{2m+1} x\, d x = 0$

(vi) $\int_0^{\pi} \sin^n x\, d x = 2 \int_0^{\pi/2} \sin^n x\, d x$

(vii) $\int_0^{2\pi} \cos^{2m} x\, d x = 2 \int_0^{\pi} \cos^{2m} x\, d x = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x\, d x$

முதலியன.

7·41. வரையறைத் தொகைப் பயிற்சிகள் : எடுத்துக் காட்டுகள்:

(1) $\int_0^{\pi} (\sin^5 x + \cos^4 x\, dx - \cos^3 x)\, d x$ என்ன ?

(i) $\int_0^{\pi} \sin^5 x\, d x = 2\int_0^{\pi/2} \sin^5 x\, d x$ (பண்பு 6)

$$= \frac{2 \cdot 4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{16}{15}$$

(ii) $\int_0^{\pi} \cos^4 x \, dx = 2\int_0^{\pi/2} \cos^4 x \, dx$ (பண்பு 6)

$$= 2 \cdot \frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{3\pi}{8}$$

(iii) $\int_0^{\pi} \cos^3 x \, dx = 0$ [பண்பு (6)]

$\therefore$ தொகை $= \dfrac{16}{15} + \dfrac{3\pi}{8}$

(2) $I = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx = \frac{\pi}{4}$ என நிறுவுக.

$$\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right);$$

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$$

பண்பு (4)ஐப் பயன்படுத்தினால்

$$I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}}{\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x}} \, dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}}{\sqrt{\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}} \, dx.$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\cos x} + \sqrt{\sin x}} \, dx.$$

$$\therefore\ 2\,I = \int_0^{\pi/2} \frac{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}{\sqrt{\sin x}+\sqrt{\cos x}}\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ I = \frac{\pi}{4}$$

(3) $\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx$

$= -\frac{\pi}{2}\log_e 2$ என நிறுவுக.

பண்பு (4)ஐப் பயன்படுத்தினல்

$$\int_0^{\pi/2} \log(\sin x)\,dx = \int_0^{\pi/2} \log\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]dx$$

$$= \int_0^{\pi/2} \log(\cos x)\,dx$$

$= I$ எனக் கொள்க.

$$\therefore\ I + I = \int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx + \int_0^{\pi/2}\log(\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}[\log(\sin x) + \log(\cos x)]\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\log(\sin x\cos x)\,dx$$

$$= \int_0^{\pi/2}\log\left(\frac{\sin 2x}{2}\right)dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log(\sin 2x)\,dx-\int_0^{\pi/2}\log 2\,dx$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log(\sin 2x)\,dx-\frac{\pi}{2}\log 2$$

இப்போது, $2x=u$ என ஈடு செய்தால்

$$\int_0^{\pi/2}\log(\sin 2x)\,dx=\tfrac{1}{2}\int_0^{\pi}\log(\sin u)\,du$$

$$=\tfrac{1}{2}\times 2\int_0^{\pi/2}\log(\sin u)\,du \quad \text{[பண்பு (6)]}$$

$$=\int_0^{\pi/2}\log(\sin x)\,dx=I$$

$$\therefore\ 2I=I-\frac{\pi}{2}\log_e 2$$

$$\therefore\ I=-\frac{\pi}{2}\log_e 2$$

4. $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}=\frac{\pi^2}{2ab}$ என நிறுவுக.

$$I=\int_0^{\pi}\frac{x\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x} \qquad (1)$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\,dx}{a^2\cos^2(\pi-x)+b^2\sin^2(\pi-x)} \quad \text{[பண்பு (4)]}$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

$$\therefore\ 2I=\int_0^{\pi}\frac{x+\pi-x}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}\,dx$$

$$=\int_0^{\pi}\frac{\pi\,dx}{a^2\cos^2 x+b^2\sin^2 x}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{\pi \, dx}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x.}$$ [பண்பு (6)]

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}{\cos^2 x}} dx.$$

$$= 2\pi \int_0^{\pi/2} \frac{\sec^2 x \, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x.}$$

$\tan x = u$ என ஈடு செய்தால்

$\sec^2 x \, dx = du.$

$$\therefore \int \frac{\sec^2 x \, dx}{a^2 + b^2 \tan^2 x} = \int \frac{du}{a^2 + b^2 u^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} \int \frac{du}{\frac{a^2}{b^2} + u^2}$$

$$= \frac{1}{b^2} \cdot \frac{1}{\frac{a}{b}} \tan^{-1} \left[ \frac{bu}{a} \right]$$

$$= \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left[ \frac{b \tan x}{a} \right]$$

$$\therefore 2I = 2\pi \frac{1}{ab} \tan^{-1} \left[ \frac{b \tan x}{a} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2\pi}{ab} \left[ \tan^{-1} (\infty) - \tan^{-1} (c) \right]$$

$$= \frac{2\pi}{ab} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{\pi^2}{ab}$$

$$\therefore I = \frac{\pi^2}{2ab}$$

## பயிற்சிகள் 7

கீழ்க்கண்டவற்றை நிறுவுக :

1. $\int_0^{\pi} \sin^5 x \, dx = \frac{16}{15}$

2. $\int_0^{\pi} \cos^6 x \, dx = \frac{5\pi}{16}$

3. $\int_0^{\pi} \sin^3 x \, (1 + 2\cos x)\,(1 + \cos x)^2 \, dx = \frac{8}{3}$

4. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \cos x \, dx = -\frac{\pi}{2} \log_e 2$

5. $\int_0^{\pi} x \sin^3 x \, dx = \frac{2\pi}{3}$

6. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sqrt{\cos x})^3}{(\sqrt{\sin x})^3 + (\sqrt{\cos x})^3} \, dx = \frac{\pi}{4}$

7. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{\sin x + \cos x} \, dx =$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\cos^2 x}{\cos x + \sin x} \, dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \log\left(1 + \sqrt{2}\right)$$

8. $\int_0^{\pi} \frac{x \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx = \pi\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$

9. $\int_0^{\pi} \frac{x}{1 + \sin x} \, dx = \pi$

10. $\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} \, dx = \frac{\pi^2}{4}$

11. $\int_0^{a} x\,(a - x)^n \, dx = \frac{a^{n+2}}{(n+1)\,(n+2)}$

12. $$\int_0^{\pi} \frac{x\,dx}{a^2 - \cos^2 x} = \frac{\pi}{2a\sqrt{a^2-1}}$$

13. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \tan x \, dx = 0$$

14. $$\int_0^{\pi} \log \ (1 + \cos x)\, dx = \pi \log_e \left(\tfrac{1}{2}\right)$$

15. $$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(a + b - x)\, dx$$

16. $$\int_{\frac{\pi}{n}}^{\frac{(n-1)\pi}{n}} x \sin^3 x\, dx = \frac{\pi}{3} \cos\frac{\pi}{n}\left(2 + \sin^2\frac{\pi}{n}\right)$$

17. $$\int_0^{\pi} x \sin^{2m} x \cos^{2n} x\, dx$$

$$= \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots\ldots 1\ (2n-1)(2n-3)\ldots\ldots 1}{(m+n)!\ 2^{m+n+1}} \cdot \pi^2$$

18. $$\int_0^{\infty} \log\left(x + \frac{1}{x}\right)\frac{dx}{1+x^2} = \pi \log_e 2$$ [$x = \tan\theta$ ஈடு செய்க]

19. $$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \log(1 + \tan x)\, dx = \tfrac{1}{8}\pi \log_e 2$$

20. $$\int_0^1 \frac{\sin^{-1} x}{x}\, dx = \frac{\pi}{2} \log 2.$$

21. $m$ ஒரு முழு எண் மதிப்புப் பெறின், $f(x+mp)=f(x)$ என்னும் சமன்பாடு பொருத்தமாகிறது. அப்போது,

$\int_0^{np} f(x)\,dx = n\int_0^{p} f(x)\,dx$ என நிறுவுக.

22. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\cot x} = \frac{\pi}{4}.$$

23. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cot x\,dx = \frac{\pi}{2}\log_e 2$$

24. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \operatorname{cosec}^2 x\,dx = \pi \log_e 2.$$

25. $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x \cos x \sin x}{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}\,dx = \frac{\pi}{4\,ab^2\,(a+b)}. \quad (a, b > 0)$$

## பகுதி 8.

### வரையறைத் தொகை (தொடர்ச்சி).

8.1 நாம் இதுவரை, பார்த்தது, $(a, b)$ என்ற குறிப்பிட்ட இடைவெளியில் $f(x)$ ஒரு தொடர்ச்சியான (continuous) சார்பு என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$$\frac{d}{dx}\left[F(x)\right] = f(x) \text{ ஆனால்}$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \text{ என்பதாகும்.}$$

$b$-ன் மதிப்பு $\infty$ எல்லையை (எண்ணிலி) நாடும்போது, $F(b)$-ன் மதிப்பு L என்ற ஒரு (finite) அளவுக்குட்பட்ட எல்லையை நாடுமானால்,

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \text{எல்லை}_{b \longrightarrow \infty} F(b) - F(a)$$

$$= L - F(a)$$

என்று கூறலாம்.

அவ்வாறே $a$-ன் மதிப்பு $-\infty$ எல்லையை நாடும்போது $F(a)$-ன் மதிப்பு L′ என்ற ஒரு (finite) அளவுக்குட்பட்ட எல்லையை நாடுமானால்,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,dx = \text{எல்லை}_{b \longrightarrow \infty} F(b) - \text{எல்லை}_{a \longrightarrow -\infty} F(a)$$

$$= L - L'$$

என்று கூறலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $a, b > 0$ எனக் கொள்வோம்.

$$\int_a^b \frac{dx}{x^3} = -\left[\frac{1}{2x^2}\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right)$$

$b \longrightarrow \infty$ ஆகும்போது $\frac{1}{b^2} \longrightarrow 0$ என்பது தெளிவு.

$$\therefore \int_a^\infty \frac{dx}{x^3} = \frac{1}{2a^2}.$$

$$(2) \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}} = \left[2\sqrt{x}\right]_a^b$$

$$= 2\left[\sqrt{b} - \sqrt{a}\right]$$

$b \longrightarrow \infty$ ஆகும்போது, $\sqrt{b} \longrightarrow \infty$ என்பது தெளிவு.

ஆகவே, $\int_a^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}}$ ன் வரையறைத் தொகை காண முடியாது (இல்லை) எனக் கூறுவோம்.

$$(3) \int_a^b \frac{dx}{1+x^2} = \left[\tan^{-1} x\right]_a^b$$

$$= \tan^{-1}(b) - \tan^{-1}(a)$$

இப்போது $b \longrightarrow \infty$ ஆனால், $\tan^{-1}(b) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$.

$a \longrightarrow -\infty$ ஆனால், $\tan^{-1}(a) \longrightarrow -\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \underset{b \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \tan^{-1}(b) - \underset{a \longrightarrow \infty}{\text{எல்லை}} \tan^{-1}(a)$$

$$= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right)$$
$$= \pi.$$

8.2 இப்போது $(a, b)$ என்ற இடைவெளியில் முடிவிலோ $(x = b)$, அல்லது ஆரம்பத்திலோ $(x = a)$, அல்லது நடுவிலோ $(x = c;\ a < c < b)$ $f(x) = \infty$ ஆனுல், $\int_a^b f(x)\,dx$ என்னவாகும் என்பதை கவனிப்போம்.

[அதாவது $f(b) = \infty$ அல்லது $f(a) = \infty$ அல்லது $f(c) = \infty$ $(a < c < b)$] என்ற நிலைகளில் :

8.21 : $f(b) = \infty$ : ε ஒரு சிறிய கூட்டெண்ணெனக் கொள்வோம். $a$ முதல் $b - \varepsilon$ வரையில் $f(x)$-ன் மதிப்பு (finite) அளவுக்குட்பட்டது எனக் கொள்வோம். இந்தக் கட்டுப்பாட்டில்,

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$$ ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்குட்பட்ட மதிப்புடைய L என்ற எல்லையாகுமானுல்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = L$$

என இலக்கணம் வகுப்போம்.

8.22 $f(a) \longrightarrow \infty$ :

அவ்வாறே, $a + \varepsilon$ முதல், $b$ வரையில் $f(x)$-ன் மதிப்பு (finite) அளவுக்குட்பட்டதாய்,

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx$$ ஒரு குறிப்பிட்ட அளவுக்குட்பட்ட மதிப்புடைய L′ என்ற எல்லையாகுமானுல்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx = L'$$

என இலக்கணம் வகுப்போம்.

8.23 $f(c) \longrightarrow \infty \ (a < c < b)$
அவ்வாறே $x = c$ என்ற மதிப்பில்,
$(a < c < b)$ $f(c) = \infty$ ஆகுமானல்,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right]$$

என இலக்கணம் வகுப்போம். ஆனால், இரண்டு எல்லைகளும் அளவுக்குட்பட்ட எல்லைகளாக இருந்தால்தான், இவ்விலக்கணம் பொருந்தும். இல்லையேல் பொருந்தாது.

எடுத்துக்காட்டு :

(1) $\int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$ என்ன ?

$x = 0$ ஆனல் $\frac{1}{\sqrt{x}} = \infty$

$$\text{எனவே } \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \int_\varepsilon^a \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$= \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \left[2\sqrt{x}\right]_\varepsilon^a$$

$$= \underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \left[2\sqrt{a} - 2\sqrt{\varepsilon}\right]$$

$$\underset{\varepsilon \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sqrt{\varepsilon} = 0$$

$$\therefore \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{a}$$

(2) $\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$ என்ன ?

$x = 2$ என்ற மதிப்பிற்கு $\frac{1}{(x-2)^2} = \infty$

எனவே

$$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2} = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_1^{2-\varepsilon} \frac{dx}{(x-2)^2}$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} - \left[\frac{1}{x-2}\right]_1^{2-\varepsilon}$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \left[-\frac{1}{-\varepsilon} + \frac{1}{1-2}\right]$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \left[-\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

ஆனல் $\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \frac{1}{\varepsilon} = \infty$

எனவே, எல்லை ஒரு அளவுக்குட்பட்டதல்லவாதலின்,

$\int_1^2 \frac{dx}{(x-2)^2}$ இல்லை.

(3) $\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$ என்ன ?

$x = 1$ ஆனல் $\frac{1}{(x-1)^2} = \infty$

$$\therefore \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} dx = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^2}$$

எனவும் பிரித்தெழுதி,

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} + \int_{1+\varepsilon}^2 \frac{dx}{(x-1)^2}\right]$$

காணவேண்டும்.

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(x-1)^2} = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} - \left[\frac{1}{x-1}\right]_0^{1-\varepsilon}$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} - \left[\frac{1}{-\varepsilon} - \frac{1}{-1}\right]$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \left[\frac{1}{\varepsilon} - 1\right]$$

ஆனால் $\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{1}{\varepsilon} = \infty$

மேலும்

$$\underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \int_{1+\varepsilon}^{2} \frac{dx}{(x-1^2)} = \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} - \left[\frac{1}{x-1}\right]_{1+\varepsilon}^{2}$$

$$= \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} - \left[\frac{1}{1} - \frac{1}{\varepsilon}\right]$$

$$= -1 + \underset{\varepsilon \to 0}{\text{எல்லை}} \quad \frac{1}{\varepsilon}$$

எனவே அளவுக்குட்பட்ட எல்லைகள் இல்லை.

$$\therefore \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^2} \text{ இல்லை.}$$

## பயிற்சிகள் 8

கீழ்க்கண்டவைகளின் மதிப்பு காண்க :

1. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$

2. $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$

3. $\int_0^\infty e^x \, dx.$

4. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$

5. $\int_1^4 \frac{dx}{(x-2)^2}$

பகுதி 9.

# வரையறைத் தொகை : பயன்படும் இடங்கள்

9.1. 6.3-ல் கூறியபடி, வரையறைத் தொகை முறையைக் கையாண்டு, பரப்புக்கள் மாத்திரமே அல்லாமல், ஒரு வளை வரையின் நீளம், உருளைப் பருமம், உருளைப் புறப் பரப்பு முதலியன காணலாம்.

ஆங்காங்கு வரையறைத் தொகையைப் பயன்படுத்தும் முறைகள் பின்னர் பொதுவாக விளக்கப்பட்டிருக்கின்றன.

வரலாற்று வழியாக, தொகை நுண் தொகை முதலில் கண்டு பிடிக்கப்பட்டு, அதன் பல்வேறு பண்புகள் ஆராயப் பட்டபொழுது, இந் நூலில் நாம் தொடர்ச்சியாக ஆராய்ந்து வரும் முறையில் ஆராயப்படவில்லை. முதன் முதலாக, பரப்பு, நீளம், பருமம் முதலியன காணவே, அது உருவாக்கப் பட்டது. பின்னர் தான் இந் நூல் வரிசைப்படி, வளர்ந்து இன்று பயன்படுகிறது.

எப்படி யென்பதை இப்போது காண்போம் :

9.11. குறிப்பிட்ட கட்டுப்பாடுகளுக்கு ஒரு சார்பு $f(x)$ அடங்கினால்,

$$\underset{h \to 0}{\text{எல்லை}}\ h\left[f(a) + f(a+h) + \ldots f(a + \overline{n-1}\ h)\right]$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

$$= F(b) - F(a)$$

என்று முன்னர் நிறுவப்பட்டது.

இங்கு $f(x)$ என்ற சார்பு $(a, b)$ என்ற இடைவெளியில் தொடர்ச்சியான (continuous) ஒரு சார்பெனவும்,

$\int f(x)\, dx = F(x) + C$ எனவும்,

$\frac{b-a}{n} = h$ எனவும்,

$n \longrightarrow \infty$ எனவும், ஆகவே $h \longrightarrow 0$ எனவும் கொள்ளப் பட்டது.

$b - a$ என்ற இடைவெளியை $n$ சம பகுதிகளாகப் பிரிக்கும் போது ஒவ்வொரு பகுதியும், $\frac{b-a}{n} = h$ எனக் கொண்டோம். அதையே,

$\frac{b-a}{n} = \Delta x$ எனக் கொள்வதும் அக் கொள்கையேயாகும். ஆகவே,

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \Delta x \left[ f(a) + f(a + \Delta x) + \ldots f(a + \overline{n-1}\, \Delta x) \right]$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

$$= F(b) - F(a)$$

அதாவது

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{x=a}^{x=b} \Delta x f(a + r\, \Delta x) = \int_a^b f(x)\, dx.$$

$$= F(b) - F(a)$$

இதுதான் எல்லாவற்றிற்கும் அடிப்படைத் தேற்றம்.

இப்போது படத்தில் (6·3 படம்) காட்டியபடி, ABDC என்ற பரப்பு, அதாவது, $f(x) = y$ என்ற வளைவரை, $x$-அச்சு $x = a$, $x = b$ என்ற $x$ ஆயத்தொலைப் புள்ளிகளில் உயர்த்திய குத்தாயங்கள், இவைகளுக்கிடைப்பட்ட பரப்பு காண, ஏதாமொரு பரப்பு நுண் பகுதி எடுத்துக் MNPQ கொள்வோம்.

அப்பரப்பு MNPQ,

$f(x)\, \Delta x$ க்கு அதிகமாயும்,

$f(x + \Delta x)\, \Delta x$-க்குக் குறைவாயும் இருக்கும்.

அதாவது,

$$f(x)\,\Delta x < \text{MNPQ} < f(x+\Delta x)\,\Delta x.$$

எனவே, MNPQ போன்ற எல்லா நுண் பகுதிப் பரப்புக்களையும் $x = a$ முதல், $x = b$ வரை கூட்டும்போது,

$$\sum_{r=0}^{n-1} f(a + r\,\Delta x)\,\Delta x < \text{முழுப்பரப்பு ABDC}$$

$$< \sum_{r=0}^{n-1} f(a + \overline{r+1}\,\Delta x)\,\Delta x$$

ஆனால் $\Delta x \longrightarrow 0$ ஆகும்போது,

$$\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} f(a + r\Delta x)\,\Delta x = \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} f(a+\overline{r+1}\,\Delta x)\,\Delta x$$

என்றும், இவ்விரண்டும்

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)\text{-க்குச் சமம்}$$

என்றும் முன்னர் நிறுவப்பட்டது (6.3-ல்)

ஆகவே, வாய்பாடு முறையாகக் கூறுங்கால்,

(i) பரப்பு நுண் பகுதி $f(x)\,\Delta x$.

(ii) முழுப்பரப்பு $\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{x=a}^{x=b} f(x)\,\Delta x.$

(iii) எனவே முழுப்பரப்பு $= \int_a^b f(x)\,dx.$

இந்த முறையையே, நீளம், பருமம், புறப்பரப்பு முதலியன காணவும் நீட்டிக்கலாம்.

9·12 **நீளம்:** படத்தில் (6.3 படம்) PQ என்பது CD என்ற வளை வரை நீளத்தின் நுண் பகுதி. $PQ = \Delta s$ எனக்கொண்டால்,

$$\text{முழு நீளம் CD} = \underset{\Delta s \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{x=a}^{x=b} \Delta s$$

$$= \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{x=a}^{x=b} \frac{\triangle s}{\triangle x} \triangle x. \quad (1)$$

$$\text{அல்லது} = \underset{\triangle y \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum_{y=f(a)}^{y=f(b)} \frac{\triangle s}{\triangle y} \triangle y. \quad (2)$$

வரையறைத் தொகை ஒரு கூட்டு மதிப்பின் எல்லை யென நிறுவியதை நாம் இங்கு பயன்படுத்தினுல்,

$$(1) = \int_a^b \frac{ds}{dx}\, dx.$$

$$(2) = \int_{f(a)}^{f(b)} \frac{ds}{dy} dy.$$

9·13. **உருளைப் பருமம் :** இப்போது ABDC என்ற பரப்பு $x$ — அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினுல் ஒரு உருளை உண்டாகிறது. அந்த உருளையின் பருமம் காண:

இங்கு பருமநுண் பகுதி (Element of Volume) MNPQ என்ற பரப்பு $x$ — அச்சை ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றுமானுல், அந்தப் பரும நுண்பகுதி,

$\pi\, [\, f\ (x)]^2\ \triangle x$-க்கு அதிகமாகவும்,

$\pi\, [f\ (x + \triangle x)^2]\ \triangle x$-க்குக் குறைவாகவு மிருக்கும்.

எனவே பரும நுண் பகுதி $\triangle V$ எனக் கொண்டால்,

$$\pi\, [f\ (x)\,]^2\ \triangle x\ < \triangle V < \pi\ [\, f\ (x + \triangle x\,)\,]^2 \triangle x.$$

$x = a$ முதல், $x = b$ வரை உள்ள எல்லாப் பரும நுண் பகுதிகளையும் கூட்டினுல்,

$$\sum_{r=0}^{n-1} \pi\ [f\ (a + r \triangle x\,)]^2\ \triangle x\ < \triangle V$$

$$< \sum_{r=o}^{r=n-1} \pi\ [f\ (a + \overline{r+1} \triangle x]^2 \triangle x.$$

ஆனால்

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} \pi \, [f(a + r \Delta x)]^2 \Delta x =$$

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} \pi \, [f(a + \overline{r+1} \Delta x]^2 \Delta x.$$

$$= \int_a^b \pi \, [f(x)]^2 \, dx.$$

ஆகவே முழுப் பருமம் $= \int_a^b \pi [f(x)]^2 \, dx.$

$$= \int_a^b \pi y^2 \, dx.$$

9. 14. **உருளையின் புறப்பரப்பு:** அதே முழு உருளையின் புறப்பரப்பு காணவேண்டுமானால், ஒரு புறப்பரப்பு நுண்பகுதி எடுத்துக் கொள்வோம்.

புறப்பரப்பு நுண்பகுதி

$2\pi f(x) \Delta s$ க்கு அதிகமாகவும்,

$2\pi f(x + \Delta x) \Delta s$ க்குக் குறைவாகவும், இருக்கும்.

அதாவது, புறப்பரப்பு நுண்பகுதி $\Delta S$ எனக் கொண்டால்,

$$2\pi f(x) \Delta s < \Delta S < 2\pi f(x + \Delta x) \Delta s$$

அதாவது,

$$2\pi f(x) \frac{\Delta s}{\Delta x} \Delta x < \Delta S < 2\pi f(x + \Delta x) \frac{\Delta s}{\Delta x} \Delta x$$

$x = a$ முதல், $x = b$ வரை உள்ள எல்லாப் புறப் பரப்பு நுண் பகுதிகளையும் கூட்டினால்,

$$\sum_{r=0}^{n-1} 2\pi f(a + r\Delta x) \frac{\Delta s}{\Delta x} \Delta x < \Delta S$$

$$< \sum_{r=0}^{n-1} 2\pi f(a + \overline{r+1} \Delta x) \frac{\Delta s}{\Delta x} \Delta x$$

ஆனல்

$$\underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} 2\pi \left[ f(a + r\,\Delta x) \right] \frac{\Delta s}{\Delta x}\,\Delta x$$

$$= \underset{\Delta x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum_{r=0}^{n-1} 2\pi \left[ f(a + \overline{r+1}\,\Delta x) \right] \frac{\Delta s}{\Delta x}\,\Delta x$$

$$= \int_a^b 2\pi f(x) \, \frac{ds}{dx}\, dx.$$

குறிப்பு *(1)*: முழு உருளை அல்லாமல், ஒரு பகுதியின் பருமமோ, புறப்பரப்போ, வேண்டுமானல், வரையறைத் தொகையெல்லைகளைத் தகுந்தபடியாக மாற்றிக் கொள்ள வேண்டும்.

குறிப்பு *(2)*: இதே நுண் பகுதி — வரையறைத் தொகை அடிப்படையில், ஒரு பரப்பின், பருமத்தின் புவிக் கவர்ச்சி மையம், (Centre of Gravity) அல்லது நிலை நெம்புத் திறன் (Moment of Inertia) காணலாம்.

சுருக்கம் :

1. பரப்பு $= \int_a^b f(x)\, dx.$

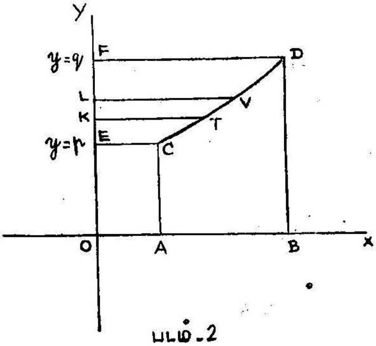
2. உருளைப் பருமம். : $\int_a^b \pi \, [f(x)]^2\, dx.$

3. உருளைப் புறப்பரப்பு $= \int_a^b 2\pi f(x) \, \frac{ds}{dx} \, dx$

4. வளை வரை நீளம் $= \int_a^b \frac{ds}{dx}\, dx.$

## 9.2. $Y$-அச்சையொட்டிய பரப்பு, நீளம் முதலியன

இப்போது, பரப்பு E C D F எடுத்துக்கொள்ளலாம்.



படம்-2

இப்பரப்பு $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கும், $y$-அச்சுக்கும், $y = p$, $y = q$ என்ற கோடுகளுக்கும் இடைப்பட்டது. இதன் பரப்பு, முன் கண்டபடியே, காணலாம்.

$$\text{நுண்பரப்பு} = \text{K L V T} = \Delta y \cdot x$$

$$\therefore \text{ முழுப்பரப்பு} = \sum x \,\Delta y = \int_{y=p}^{y=q} x \, dy \qquad (i)$$

CDன் நீளம், இதையொட்டியே காணலாம்.

$$\text{நுண்பகுதி நீளம்} = \text{T V} = \Delta s = \frac{\Delta s}{\Delta y} \Delta y.$$

$$\therefore \text{ முழு நீளம்} = \sum \frac{\Delta s}{\Delta y} \Delta y = \int_{y=p}^{y=q} \frac{ds}{dy} dy \qquad \text{(ii)}$$

E C D F என்ற பரப்பு, $y$-அச்சை ஒரு முறை சுற்றினால் ஏற்படும்,

உருளைப் பருமமும், புறப்பரப்பும் இதையொட்டியே காணலாம்.

நுண்பகுதிப் பருமம் $= \pi x^2 \triangle y.$

$$\text{முழுப் பருமம்} = \sum \pi x^2 \triangle y$$

$$= \int_{y=p}^{y=q} \pi x^2 \, dy. \qquad \text{(iii)}$$

நுண்பகுதிப் புறப்பரப்பு $= 2\pi x \triangle s$

$$= 2\pi x \frac{\triangle s}{\triangle y} \triangle y$$

$$\therefore \quad \text{முழுப் புறப்பரப்பு} = \int_{y=p}^{y=q} 2\pi x \frac{ds}{dy} \, dy \qquad \text{(iv)}$$

விளக்கம் யாவும், $x$-அச்சை யொட்டி விளக்கப்பட்ட முறையேயாம்.

பகுதி 10

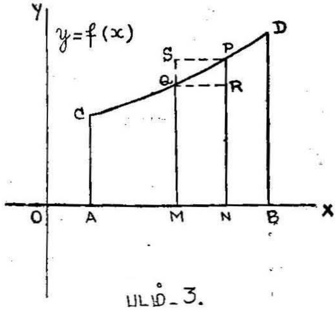
# பரப்புக்கள்

*10·1.* $y = f(x)$ என்ற வளை வரை, $x$ — அச்சு $OX$, $x = a$, $x = b$ என்ற புள்ளிகளில் உயர்த்தப்பட்ட குத்தாயங்கள், இவைகளுக் கிடையே யுள்ள பரப்பு ,

$$= \int_a^b y \, dx$$

$$= \int_a^b f(x) \, dx$$

என்ற வரையறைப்பட்ட தொகைக்குச் சமம் என்று 9·11-ல் விளக்கப்பட்டது.




படம் - 3.

அதாவது மேலே காட்டப்பட்ட படத்தில் ABDC-ன் பரப்பு $= \int_a^b f(x) \, dx$.

இந் தேற்றத்தை மற்ரோர் முறையிலும் நிறுவலாம்.

படத்தில், $y = f(x)$ என்ற வளை வரை CD ;

$x = a$-ல் உயர்த்தப்பட்ட குத்தாயம் AC ;

$x = b$-ல் உயர்த்தப்பட்ட குத்தாயம் BD ;

Q, அவ் வளை வரையில் ஏதாமொரு புள்ளி $(x, y)$

P, அவ் வளை வரையில், சற்று மேலுள்ள புள்ளி $(x + \Delta x, y + \Delta y)$.

படத்தில் $MN = \Delta x = QR = SP$.

$RP = \Delta y = QS$.

இப்போது பரப்பு AMQC என்பது M-ன் $x$-ஆயத் தொலையைச் சார்ந்தது.

எனவே பரப்பு $AMQC = \phi(x)$ எனக் கொண்டு, $\phi(x)$ என்னவென்று காண்போம்.

அவ்வாறே பரப்பு $ANPC = \phi(x + \Delta x)$

$\therefore$ பரப்பு $MNPQ = \phi(x + \Delta x) - \phi(x)$

ஆனல்,

நீண்ட சதுரப் பரப்பு MNRQ < பரப்பு MNPQ ;

நீண்ட சதுரப் பரப்பு MNPS > பரப்பு MNPQ.

$$\therefore MNRQ < MNPQ < MNPS$$

அதாவது,

$$f(x) . \Delta x < \phi(x + \Delta x) - \phi(x) < f(x + \Delta x) \cdot \Delta x$$

எல்லாவற்றையும் $\Delta x$ ஆல் வகுத்து $\Delta x \longrightarrow 0$ எல்லை கண்டால்,

$$f(x) < \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \frac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} < \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} f(x + \Delta x)$$

ஆனல், $\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \dfrac{\phi(x + \Delta x) - \phi(x)}{\Delta x} = \phi^1(x)$

மேலும் $\underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} f(x + \Delta x) = f(x)$

$\therefore \quad f(x) = \phi^1(x)$ எனத் தெரிகிறது.

$\therefore \quad \phi(x) = \int f(x)\, dx$

$= F(x) + C$ எனக் கொள்வோம்.

இங்கு C-ன் மதிப்பு காண, $x = a$ எனக் கொண்டால், $\phi(a) = 0$.

$$\therefore \quad 0 = F(a) + C$$

$$\therefore \quad C = - F(a)$$

$$\therefore \quad \phi(x) = F(x) - F(a)$$

இப்போது $x = b$ எனக் கொண்டால்

$$\phi(b) = F(b) - F(a)$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

$\therefore$ வேண்டிய பரப்பு $= \int_a^b f(x)\, dx.$

நடைமுறையில் பின் காட்டப்பட்ட சுருக்கமான வழியைப் பயன்படுத்தலாம் :

$$\text{ஒரு நுண் பகுதிப் பரப்பு} = y \Delta x$$
$$= f(x) \Delta x$$

$$\text{முழுப் பரப்பு} = \sum_{\Delta x \to 0} y \Delta x.$$

$$= \sum_{\Delta \to 0} f(x) \Delta x.$$

$$= \int_a^b f(x)\, dx.$$

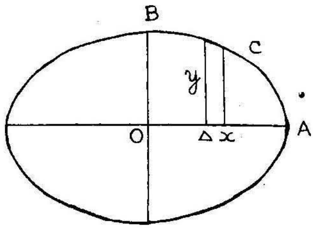
இது முறையே யொழிய, தேற்றமெனக் கொள்ளுதல் கணிதப் பண்புக்கு ஏற்புடைத்து என்று கணித வல்லுனர்கள் முழு மனதோடு ஏற்றுக்கொள்ள மாட்டார்கள்.

இதே வழியை, நடைமுறையில், பருமம், புறப்பரப்பு, வளை வரை நீளம், புவிக் கவர்ச்சி மையம், நிலை நெம்புத் திறன் முதலியன காணப் பயன்படுத்திக் கொள்ளலாம்.

**10·11.** எடுத்துக்காட்டுகள் :

(1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தின் பரப்பு காண்க.

நீள் வட்டத்தில் நான்கில் ஒரு பகுதியான, OACB ன் பரப்பைக் கண்டு, அதை நாலால் பெருக்கினல் நீள் வட்டத்தின் பரப்பு கிடைக்கும்.




படம்-4

$$\text{OACB ல் ஒரு நுண்பகுதிப் பரப்பு} = y \Delta x$$

$$= \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ \Delta x$$

$x = 0$ முதல் $x = a$ வரை கட்டம்,

$$\text{முழுப்பரப்பு} = \underset{\Delta x \longrightarrow o}{\text{எல்லை}} \sum \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, \Delta x$$

$$= \int_0^a \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}\, dx.$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{b}{a} \left[ x\sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^a$$

$$= \frac{1}{2}\, \frac{b}{a} \left[ o + \frac{\pi a^2}{2} - o - o \right]$$

$$= \frac{\pi}{4} ab$$

$\therefore$ முழு நீள் வட்டத்தின் பரப்பு $= 4 \times \frac{\pi ab}{4}$

$= \pi ab.$

(2) $ay^2 = x^2\ (a-x)$ என்ற வளை வரையின் வளையப் பகுதியின் பரப்பை மட்டும் காண்க.

முதலில் இவ் வளை வரையின் அமைப்பை நாம் ஒருவாறு அறிந்துகொள்வது நலம்.

$x = o$ ஆனால், $y = o$ ஆகிறது (1)

$a = o$ ஆனால், $y = o$ ஆகிறது (2)

மேலும் இது $y$-ன் இரட்டைப் படைச் சார்பாக இருப்பதால், இவ் வளை வரை, $x$-அச்சுக்குச் சமச் சீர் பெற்றதாக, அதாவது $x$-அச்சுக்கு இரு பக்கங்களிலும் ஒரே அமைப்புடையதாக, இருக்கும் (3) $x > a$ ஆனால் $ay^2 =$ ஒரு கழிவெண்ணாகும். ஆகவே $x > a$-க்கு, $y$-ன் மதிப்பு ஒரு கற்பனையெண்ணாகவே யிருக்க முடியும் (4) ஆகவே இவ் வளை வரை $x = a$-க்கு மேல் வரைய முடியாது.

$x < o$ ஆனால் $ay^2$ வளர்ந்துகொண்டே $\infty$ வரை செல்லும்.

எனவே, $x$ ஒரு கழிவெண் மதிப்பேற்று, எல்லையற்று வளர்ந்து போகுமானால், $ay^2$-ம் $\infty$ வரை வளர்ந்து போகும். $x \longrightarrow -\infty$ எல்லையை நாடும்போது $y \longrightarrow \pm\infty$ எல்லைகளை நாடும். (5)

இந்த 5 பண்புகளையும் உளங்கொண்டு வளை வரையமைப்பை ஆராய்ந்தால், வளை வரை

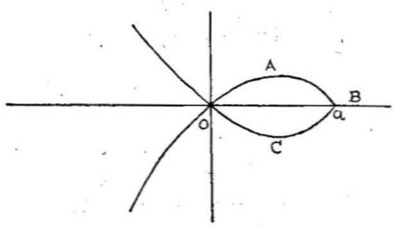
(1) $x = o$, $y = o$ வழியாகச் செல்லும்;

(2) $x = a$, $y = o$ வழியாகச் செல்லும்;

(3) $x$ அச்சுக்குச் சமச் சீர் பெற்றதாயிருக்கும் ;

(4) $x = a$-க்கு மேல், $y$-க்கு மெய்யெண்மதிப்பில்லையாதலின், $x = a$-க்கு மேல், வளை வரை இடம் பெறாது ;

(5) $x = o$-க்குக் குறைந்த (அதாவது கழிவெண்) மதிப்புகளுக்கு, வளை வரை, $x$ — அச்சுக்குச் சமச்சீர் படைத்து $-\infty$ வரை செல்லும். வளைவரைப் படம், பின்வருமாறு :—




படம் - 5

வளையப் பகுதி $o$ABC.

$$\text{அதன் பரப்பு} = 2\int_0^a y\,dx.$$

$$= 2\int_0^a \frac{x\sqrt{a-x}}{\sqrt{a}}\,dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}}\int_0^a x\sqrt{a-x}\,dx.$$

$x = a \sin^2\theta$ என ஈடு செய்தால்,

$x = o$-க்குரிய, $\theta = o$ எல்லையும்,

$x = a$-க்குரிய, $\theta = \frac{\pi}{2}$ எல்லையும் கிடைக்கும்,

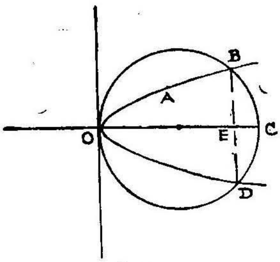
$$\therefore \text{ பரப்பு} = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{\pi/2} a \sin^2\theta \cdot \sqrt{a} \cos\theta \cdot 2a \sin\theta \cos\theta \, d\theta$$

$$= 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \cos^2\theta \, d\theta.$$

$$= 4a^2 . \frac{2 \cdot 1}{5 \cdot 3}$$

$$= \frac{8a^2}{15}.$$

(3) $y^2 = ax$ என்ற தொடு வளைவுக்கும், $x^2 + y^2 = 4ax$ என்ற வட்டத்திற்கும் பொதுவாக உள்ள பரப்பு என்ன?




படம்-6

முதலில், இரண்டிற்கும் உள்ள பொதுவான புள்ளிகள், அல்லது இரண்டு வளை வரைகளும் வெட்டும் புள்ளிகளை அறிய வேண்டும்.

$y^2 = ax$, ஆய ஆதியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு தொடு வளைவு.

$x^2 + y^2 = 4ax$ என்பது

$(x - 2a)^2 + y^2 = 4a^2$ என்ற வட்டம்.

அதன் மையம் $(2a, o)$; அரை விட்டம் $2a$.

இவ் வட்டமும் $(o, o)$ ஆய ஆதி வழியாகச் செல்கிறது.

எனவே ஆய ஆதியான $(0, 0)$ இரண்டுக்கும் பொதுவான ஒரு புள்ளி,

இரு சமன்பாடுகளையும், ஒருங்கமைச் சமன்பாடுகளாகக் கொண்டு தீர்வு கண்டால், மற்றொரு பொதுப் புள்ளி கிடைக்கும்.

$$x^2 + ax = 4\,ax$$

$$\therefore\ x\,(x - 3a) = 0$$

$$\therefore\ x = 0\,;\ x = 3a$$

$$y = 0\,;\quad y = a\sqrt{3}$$

என்பவை பொது அல்லது வெட்டுப் புள்ளிகள்.

படத்தின்படி, இரண்டிற்கும் பொதுவான பரப்பு
= O A B C D O

= O A B E D O + B C D E B.

இரண்டு வளை வரைகளும் $x$-அச்சுக்குச் சமச்சீர் படைத்தவை.

எனவே $\left.\begin{array}{r} \text{OABEDO} = 2\cdot\text{OABEO} \\ \text{BCDEB} = 2\cdot\text{BECB.} \end{array}\right\}$ பரப்புக்கள்.

பரப்பு $\text{OABEO} = \int_0^{3a} \sqrt{ax}\ dx.$

$$= \sqrt{a}\left[\frac{2'}{3}\,x^{\frac{3}{2}}\right]_0^{3a}$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{3}\cdot\ a\sqrt{a}$$

$$= 2\sqrt{3a^2}.$$

பரப்பு $\text{BECB} = \int_{3a}^{4a} \sqrt{4a^2 - (x-2a)^2}\ dx.$

$$= \frac{1}{2}\left[(x-2a)\sqrt{4a^2-(x-2a)^2} + 4a^2\sin^{-1}\left(\frac{x-2a}{2a}\right)\right]_{3a}^{4a.}$$

$$= \tfrac{1}{2}\left[\left(0 + 4a^2\frac{\pi}{2}\right) - \left\{a^2\sqrt{3} + 4a^2\left(\frac{\pi}{6}\right)\right\}\right]$$

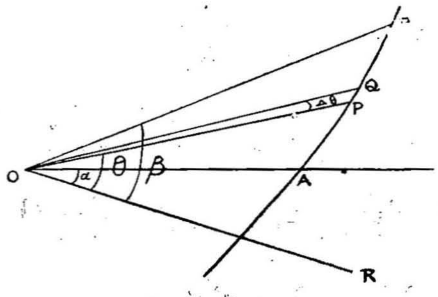
$$= \frac{a^2}{2}\left[\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right].$$

பரப்பு OABCDO = பொதுவாக உள்ள பரப்பு.

$$= 2\left[2\sqrt{3}\,a^2 + \frac{a^2}{2}\left(\frac{4\pi}{3} - \sqrt{3}\right)\right]$$

$$= \frac{4\pi a^2}{3} + 3\sqrt{3}\,a^2$$

**10·2.** போலார் (**Polar**) சமன்பாடுகள் மூலம் கொடுக்கப்படும் வளை வரைகளுக்குப் பரப்பு காண் முறை :




படம்-7

**OR**—போலார் முதற்கோடு.

வரையப் பட்டிருக்கும் வளைவரை $r = f(\theta)$

$\angle$ ROA $= \alpha$

$\angle$ ROB $= \beta$.

$\theta = \alpha$ முதல் $\theta = \beta$ இரண்டு திசைக் கோடுகளுக்கும் $r = f(\theta)$ என்ற வளைவரைக்கும் உட்பட்ட பரப்பு **AOB** கண்டு பிடிப்போம்.

ஏதாமொரு திசைக்கோடு OP-ம், அதற்கடுத்தாற் போல் OQ-ம் வரைக.

$\angle$ ROP $= \theta$ (பொது)

$\angle$ ROQ $= \theta + \Delta\theta$ எனக் கொள்க.

$\angle$ POQ $= \Delta\theta$.

ஒரு நுண் பகுதிப் பரப்பு POQ $= \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

$$\therefore \text{ முழுப்பரப்பு } = \lim_{\Delta\theta \to 0} \sum_{\theta=a}^{\theta=\beta} \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_a^\beta r^2 \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_a^\beta [f(\theta)]^2 d\theta.$$

**10.21.** எடுத்துக் காட்டு :

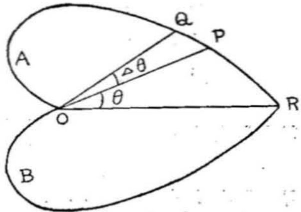
(1) $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சு வளையின் முழுப் பரப்பைக் காண்க.

நெஞ்சு வளை வரை முதற் கோடான O R-க்கு சமச்சீர் பெற்றது. ஏனெனில்

$$r = a(1 + \cos\theta)$$
$$= a[1 + \cos(-\theta)]$$

$\text{O R} = 2a$

$\theta = 0$ முதல் $\theta = 2\pi$ வரை பரந்திருக்கிறது.



படம்-8. நெஞ்சுவளை

பரப்பு O R A O = பரப்பு O B R O.

O P Q ஒரு நுண் பகுதிப் பரப்பு $= \tfrac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

$$\therefore \text{ முழுப்பரப்பு } = \int_0^{2\pi} \tfrac{1}{2} r^2 \, d\theta$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^{2\pi} a^2 (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$= 2 \times \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta.$$

$$= a^2 \int_0^{\pi} 4 \cos^4 \frac{\theta}{2} \, d\theta.$$

$\frac{\theta}{2} = x$ எனக் கொண்டால்,

$$\text{பரப்பு} = 4\, a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \cos^4 x\, dx$$

$$= 8\, a^2 . \frac{3\,.\,1}{4\,.\,2} . \frac{\pi}{2}$$

$$= \tfrac{3}{2}\, \pi a^2.$$

எடுத்துக்காட்டு :

(2) $x^3 + y^3 = 3\, a\, xy$ என்ற போலியம் (folium) வளையத்தின் பரப்பு காண்க.

இங்கு $x$, $y$ சார்பாக வளைவரைச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருந்தபோதிலும், போலார் அமைப்புக்கொண்டு பரப்பு காண்பது எளிதாகும்.

$r \cos \theta = x$

$r \sin \theta = y$ என ஈடு செய்யின்,

$x^3 + y^3 = 3\, a\, xy$ என்ற சமன்பாடு

$r^3 \cos^3 \theta + r^3 \sin^3 \theta = 3\, ar^2 \cos \theta \sin \theta$ என மாறுகிறது.

அதாவது $r\, (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) = 3a \cos \theta \sin \theta$

அதாவது $r = \dfrac{3a \cos \theta \sin \theta}{\cos^3\theta + \sin^3\theta}$

$\theta = 0$ ஆனால் $r = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ ஆனால் $r = 0$

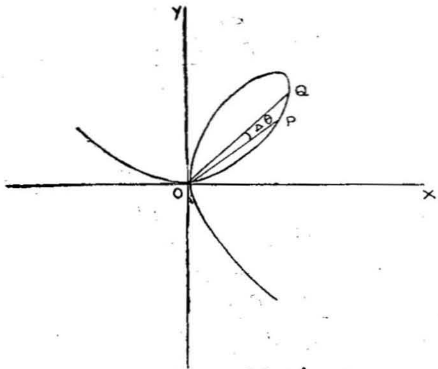
ஒரு வளையம் $\theta = 0$ முதல், $\theta = \frac{\pi}{2}$ வரை படர்ந்திருக்கும்.

பட அமைப்பு பின்னர் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

$$\theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ஆனால் } r = \frac{3a \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times -\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

$$= +\infty$$

$\theta = \frac{7\pi}{4}$ ஆனாலும் $r = +\infty$.




படம்-9. போலியம் ( Folium)

ஒரு நுண் பகுதிப் பரப்பு $= POQ = \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$

$$\therefore \text{ முழுப்பரப்பு } = \lim_{\Delta\theta \longrightarrow 0} \sum_{\theta=0}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} r^2 \Delta\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} r^2 \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{9a^2 \sin^2\theta \cos^2\theta}{(\cos^3\theta + \sin^3\theta)^2} \, d\theta$$

$$= \frac{9a^2}{2} \int_0^{\pi/2} \frac{\tan^2\theta \sec^2\theta}{(1 + \tan^3\theta)^2} \, d\theta$$

$\tan\theta = t$ என ஈடு செய்க.

$\theta = 0$க்கு உரிய $t = 0$

$\theta = \frac{\pi}{2}$க்கு உரிய $t = \infty$

$$\therefore \text{ பரப்பு } = \frac{9a^2}{2}\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{9a^2}{2} \times \frac{1}{3}\int_0^\infty \frac{3t^2\,dt}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\int_0^\infty \frac{d(1+t^3)}{(1+t^3)^2}$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left[-\frac{1}{1+t^3}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{3a^2}{2}\left[-0+1\right]$$

$$= \frac{3a^2}{2}$$

## பயிற்சிகள் 9.

### பரப்பு.

1. கீழ்க்கண்ட பரப்பினை மதிப்பிடுக :—

(i) தொடு வளைவு, $y^2 = 4ax$ ; $x$ — அச்சு ; $x=0$, $x=2a$ என்ற குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு.

(ii) கயிற்று வளை $y = c \cosh \dfrac{x}{c}$ ; $x$ — அச்சு ; $x = 0$, $x = c$ என்ற குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்ட பரப்பு.

(iii) $y = \sin x$-ன் ஒரு முழு வளைவு.

2. ஒரு அரை வட்டத்தின் பரப்பை, வரையறைப்பட்ட தொகை முறையில் மதிப்பிடுக.

3. கீழ்க்கண்ட வளையங்களின் பரப்பினை மதிப்பிடுக :—

(i) $ay^2 = x^2 (a + x)$

(ii) $a^3 y^2 = x^4 (x + b)$

(iii) $a^2 y^2 = x^3 (2a - x)$

(iv) $a^2 y^2 = x^2 (a^2 - x^2)$

4. $y^2 = 2x$ என்ற தொடு வளைவை, $y = 4x - 1$ என்ற கோடு வெட்டுகிறது. இரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு என்ன ?

5. $x^2 y^2 = a^2 (y^2 - x^2)$ என்ற வளை வரைக்கும், அதன் நீளத் தொடு வரைகளுக்கும் இடையே உள்ள பரப்பு காண்க.

6. $x = a \sin^2 t$ ; $y = a \dfrac{\sin^3 t}{\cos t}$ என்ற வளை வரைக்கும் அதன் நீளத் தொடு வரைகளுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு காண்க.

7. கீழ்க்கண்ட வளை வரைகளுக்குப் பொதுவாக உள்ள பரப்பு காண்க :—

(i) $y^2 = 4ax$ ; $x^2 = 4ay$

(ii) $y = x^3$ ; $y^2 = 9x$

(iii) $y^2 = 4ax$ ; $x^2 + y^2 = 8ax$

(vi) $x^2 + 2y^2 = 2c^2$ ; $2x^2 + y^2 = 2c^2$

(v) $y^2 = 4a (x + a)$ ; $y^2 = 4b (b - x)$.

8. $x = a (\theta - \sin \theta)$ ; $y = a (1 - \cos \theta)$ என்ற வளை வரையின் ஒரு வில்லுக்குட்பட்ட பரப்பு காண்க.

9. $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ என்ற வளை வரைக் குரிய முழுப் பரப்பு காண்க.

10. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ என்ற வளை வரைக்குரிய முழுப் பரப் பென்ன ?

## பயிற்சிகள் 10.

பரப்பு (போலார் சமன்பாட்டு வளைவரைகள்) கீழ்க்கண்டவைகளின் பரப்பு காண்க :—

1. $r = a(1 - \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை.

2. $r = a(\sin 2\theta + \cos 2\theta)$; எல்லை 0 முதல் $2\pi$.

3. $\dfrac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ என்ற தொடு வளைவுக்கும், அதன் குவியம் வழியாகச் செல்லும் இரட்டைக் குத்தாயத்திற்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு.

4. $r = ae^{m\theta}$ ; $\theta = \alpha$ முதல் $\theta = \beta$ வரை.

5. $r = a\theta \cos\theta$ ன் வளையம்.

6. $r = 3 + 2\cos\theta$.

7. $r = a\cos n\theta$ ன் ஒரு வளையம் ($n$-கூட்டு முழு எண்).

8. $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ ன் ஒரு வளையம்.

9. $x^4 + y^4 = 4a^2 xy$ ன் ஒரு வளையம்.

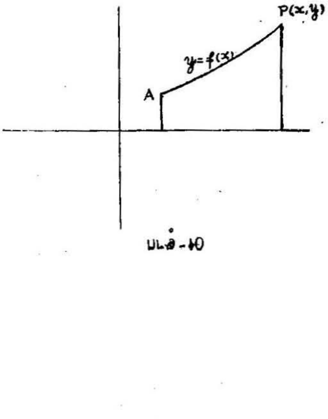
10. $r = a + b\cos\theta$ ன் இரண்டு வளையங்கள் ($b > a$).

குறிப்பு.—பயிற்சிகள் (8), (9) இரண்டிற்கும் முதலில் $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ என ஈடு செய்து, போலார் சமன்பாடாக்கி பின்னர் பரப்பு காண்க.

பகுதி 11.

# வளைவரை நீளங்கள்

**11·1 வளைவரை நீளம்** $y = f(x)$ என்றவளைவரையில், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி A $[a, f(a)]$ லிருந்து P $(x, y)$ என்ற புள்ளி வரை உள்ள வளை நீளம் $s$ எனக்கொண்டால்,



படம்-10

வகை நுண் கணிதப்படி,

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

என்று நாம் அறிவோம்

எனவே,

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

ஆகவே, A, B என்ற இரண்டு புள்ளிகள், $[a, f(a)]$ ; $[b, f(b)]$ ; $y = f(x)$ என்ற வளைவரையில் எடுத்துக்கொண்டால்,

A Bன் வளை நீளம்

$$= \underset{\Delta s \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum \Delta s$$

$$= \underset{\Delta a \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum \frac{\Delta s}{\Delta x} \cdot \Delta x$$

$$= \int_a^b \frac{ds}{dx}\, dx.$$

$$= \int_b^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

*11·11* மேலும் $x = f(t)$; $y = F(t)$ என்ற வளைவரைச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டால், $t = t_1$ முதல் $t = t_2$ வரை உள்ள வளை நீளம்,

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\, dt.$$

*11·12* ஒரு வளை வரை போலார் சமன்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்டால்,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

என வகை நுண் கணிதப்படி, நாம் அறிவோம்.

எனவே AB என்ற வளை நீளம்

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}\, d\theta$$

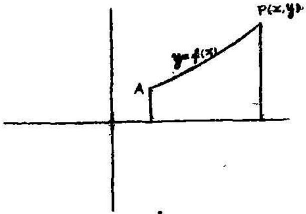
$$\text{அல்லது} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}\, dr.$$

இங்கு, முறையே $\theta_1$, $\theta_2$, $r_1$, $r_2$, என்பவை A, B ன் திசை கோணங்களும், திசை தூரங்களும் ஆகும்.

பகுதி 11.

# வளைவரை நீளங்கள்

*11·1. வளைவரை நீளம்* $y=f(x)$ என்ற வளைவரையில், ஒரு குறிப்பிட்ட புள்ளி $A\,[a, f(a)]$-யிலிருந்து $P(x, y)$ என்ற புள்ளி வரை உள்ள வளை நீளம் $s$ எனக்கொண்டால்,



படம்-10

வகை நுண் கணிதப்படி,

$$\frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

என்று நாம் அறிவோம்.

எனவே,

$$s=\int_a^x \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx$$

ஆகவே, $A$, $B$ என்ற இரண்டு புள்ளிகள், $[a, f(a)]$ ; $[b, f(b)]$ ; $y=f(x)$ என்ற வளைவரையில் எடுத்துக்கொண்டால்,

$A\,B$-இன் வளைநீளம்

$$= \underset{\Delta s \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum \Delta s$$

$$= \underset{\Delta x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum \frac{\Delta s}{\Delta x}.\Delta x$$

$$= \int_a^b \frac{ds}{dx}\, dx.$$

$$= \int_a^a \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

*11·1·1.* மேலும் $x = f(t)$ ; $y = F(t)$ என்ற வளைவரைச் சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டால், $t = t$ முதல் $t = t_2$ வரை உள்ள வளை நீளம்,

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

**11·1·2.** ஒரு வளை வரை போலார் சமன்பாட்டில் கொடுக்கப்பட்டால்,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$\frac{ds}{dr} = \frac{ds}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dr}$$

$$= \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

என வகை நுண் கணிதப்படி, நாம் அறிவோம்.

எனவே $A\ B$ என்ற வளை நீளம்

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

$$\text{அல்லது} = \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{1 + r^2 \left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2} dr$$

இங்கு, முறையே $\theta_1, \theta_2, r_1, r_2$, என்பவை $A$, $B$-இன் திசை கோணங்களும், திசை தூரங்களும் ஆகும்.

11·1.3. எடுத்துக் காட்டு ;

(1) $y^2=4\,ax$ என்ற பரவளையத்தில் ஆய ஆதியிலிருந்து, அதாவது $(0,0)$ -இலிருந்து $(a,\ 2a)$ என்ற புள்ளிவரை உள்ள நீளம் என்ன ?

$$y^2=4\,ax$$

$$\therefore\quad 2y\frac{dy}{dx}=4a$$

$$\therefore\quad \frac{ds}{dx}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$=\sqrt{1+\frac{4a^2}{y^2}}$$

$$=\frac{\sqrt{y^2+4a^2}}{y}$$

$$=\frac{\sqrt{4\,ax+4a^2}}{2\sqrt{ax}}$$

$$\sqrt{\frac{x+a}{x}}$$

வேண்டிய நீளம் $=\displaystyle\int_0^a \frac{ds}{dx}\,dx$

$$=\int_0^a \sqrt{\frac{x+a}{x}}\,dx.$$

$x=u^2$ என ஈடு செய்க

$du=2u\,d\bar{u}$

$x+a=u^2+a.$

$x=0$ ஆனால் $u=0$

$x=a$ ஆனால் $u=\sqrt{a}$

∴ வரையறைப்பட்ட தொகை

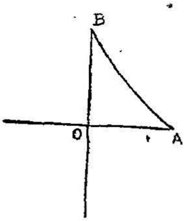
$$= 2\int_0^{\sqrt{a}} \sqrt{u^2 + a}\, du$$

$$= \left[ u\sqrt{u^2+a} + a \log (u + \sqrt{u^2+a}) \right]_0^{\sqrt{a}}$$

$$= \left[ \sqrt{a}.\ \sqrt{2a} + a \log (\sqrt{a} + \sqrt{2a}) - a \log \sqrt{a} \right]$$

$$= a\sqrt{2} + a \log \frac{\sqrt{a}\,(1+\sqrt{2})}{\sqrt{a}}$$

$$= a\sqrt{2} + a \log (1 + \sqrt{2})$$



படம்-11. நாற்கூர் விண்மீன்

(2) $x = a \cos^3 t$
$y = a \sin^3 t$
என்ற வளை வரையில் $t = 0$ முதல் $t = \frac{\pi}{2}$ வரை உள்ள வளை நீளம் என்ன ? (படம் 11)

வளைவரையின் படம் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. இது $x$-அச்சையும் $y$-அச்சையும் ஒட்டிச் சமச்சீர் ($t = 0$ முதல் $t = \frac{\pi}{2}$ வரை) பெற்றது. (படம் 12)

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3a^2 \sin^2 t \cos t$$

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

$$= \sqrt{9a^2 \cos^4 t \sin^2 t + 9a^2 \sin^4 t \cos^2 t}$$

$$= 3a \sin t \cos t$$

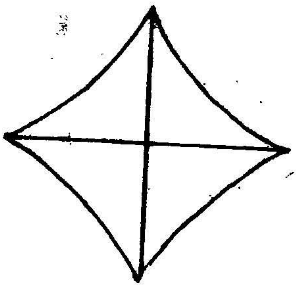
$$\therefore s = \int_0^{\pi/2} \frac{ds}{dt}\, dt$$

$$= \int_0^{\pi/2} 3a \sin t \cos t\, dt$$

$$= \left[ \frac{3a \sin t^2}{2} \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{3a}{2}$$

இந்த வளைவரை நாற்கூர் விண்மீன் (Four-pointed Star or Four-cusped hypocycloid) எனப் பெயர் பெறும். உருவம் வைத்தே பெயர் பெற்றது.



படம்_12

நாற்கூர் விண்மீன்

இதன் முழு நீளம் $= 4 \times \frac{3}{2} a$

$= 6a.$

(3) $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளையின் முழு நீளம் என்ன ?

படம் முன்னர் 10·2.1-இல் காட்டப்பட்டிருக்கிறது. சில பண்புகளும் அங்கு கூறப்பட்டிருக்கின்றன.

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(1+\cos\theta)^2 + (-a\sin\theta)^2}$$

$$= 2a\cos\frac{\theta}{2}$$

பாதி நீளம் $= 2a \int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\, d\theta$

$$= 4a\left[\sin\frac{\theta}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$= 4a$$

முழு நீளம் $= 8a$

(4) $r = ae^{\theta\cot\alpha}$ என்ற சமகோணச் சுருளின் (equiangular spiral) நீளம், $r = r_1$ முதல் $r = r_2$ வரை என்ன ?

$$\frac{dr}{d\theta} = a\cot\alpha\, e^{\theta\cot\alpha}$$

$$= r\cot a$$

$$\therefore \frac{ds}{dr} = \sqrt{1 + r^2\left(\frac{d\theta}{dr}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \frac{r^2}{r^2\cot^2 a}}$$

$$= \sec a$$

$$\therefore s = \int_{r_1}^{r_2} \frac{ds}{dr}\, dr$$

$$= \int_{r_1}^{r_2} \sec a\, dr$$

$$= (r_2 - r_1)\sec a$$

$a$ என்பது இங்கு ஒரு மாறிலி.

(2) $4x^2 + 9y^2 = 36$ என்ற நீள்வட்டம், $x$-அச்சை சுற்றினல், பெறப்படும் உருளையின் பருமம் என்ன ?

$4x^2 + 9y^2 = 36$ என்பதை

$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ என எழுதினல்

அது ஒரு நீள் வட்டமெனத் தெரியும்.

அரை நீளச்சு 3 அலகுகள் எனவும் அரைக்குறையச்சு 2 அலகுகள் எனவும் தெரிகிறது.

$$\text{பருமம்} = \pi \int_{-3}^{3} y^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-3}^{3} \left(\frac{36-4x^2}{9}\right) dx$$

$$= \frac{2\pi}{9} \int_{0}^{3} (36 - 4x^2)\, dx$$

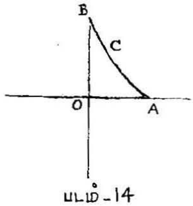
$$= \frac{2\pi}{9} \left[36x - \frac{4x^3}{3}\right]_0^3$$

$$= \frac{2\pi}{9} \left[108 - 36\right]$$

$$= \frac{2\pi}{9} \times 72$$

$= 16\pi$ கன அலகுகள்.

(3). முதல் நாற்கூறிலுள்ள, நாற்கூர் விண்மீன், $x = a \cos^3 t$; $y = a \sin^3 t$, $x$ அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றி வரும் உருளையின் பருமம் என்ன ?



படம்-14

OACB என்ற பரப்பு $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது.

$x$-ன் எல்லைகள் $0$ முதல் $a$ வரை.

ஆகவே $t$ ன் எல்லைகள் $\frac{\pi}{2}$ முதல் $0$.

$$\text{பருமம்} = \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} y^2\, dx.$$

$$= \pi \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a^2 \sin^6 t.\ (-3a \cos^2 t \sin t)\, dt$$

$$= 3a^3 \int_{0}^{\pi/2} \sin^7 t \cos^2 t\, dt$$

$$= 3a^3.\ \frac{6\ .\ 4\ .\ 2\ .\ 1}{9\ .\ 7\ .\ 5\ .\ 3}$$

$$= \frac{16\ \pi\ a^3}{105}.$$

4. $y^2 = x^4 (x + 2)$ என்ற வளைவரையின் வளையம், $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் வரும் உருளையின் பருமம் யாது ?

முதலில் வளையத்தின் அமைப்பு காண்போம்.

(1) கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு, $y$-ன் இரட்டைப் படைச் சார்பு ; ஆகவே $x$-அச்சை யொட்டி சமச்சீர் பெற்றது.

(2) $x = 0$, $y = 0$ வழியாக வளைவரை செல்லும்.

(3) $x = -2$, $y = 0$ வழியாக வளைவரை செல்லும்.

(4) $x > 2$ ஆக, $y = \pm \infty$ வரை விரிந்து போகும்.

(5) $x < -2$ ஆக, $y$ கற்பனை மதிப்புப் பெறும்.

ஆகவே வளையம், $x = -2$ முதல், $x = 0$ வரை இருக்கும். $x < -2$ ஆனுல் வளைவரைப் பகுதியில்லை. அமைப்பு பின் காட்டப்பட்டிருக்கிறது.

A B O என்ற பரப்பு சுற்றி உருளை ஏற்படுகிறது.

$$\text{பருமம்} = \pi \int_{-2}^{0} y^2\, dx$$

$$= \pi \int_{-2}^{0} x^4\ (x + 2)\ dx$$

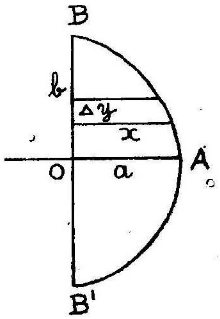
$$= \pi \left[ \frac{x^6}{6} + \frac{2x^5}{5} \right]_{-2}^{0}$$

$$= \pi \left[ (0 + 0) - \left( \frac{64}{6} - \frac{64}{5} \right) \right]$$

$$= \frac{64}{30} \pi$$

$$= \frac{32}{15} \pi .$$

(5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள் வட்டத்தில் ஆய ஆதிக்கு வலது பக்கமுள்ள பரப்பு, $y$ — அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது. உருளையின் பருமம் யாது. (9·2 காண்க).



படம்-15

B' A B O B' என்ற பரப்பு B' B என்ற அச்சை சுற்றுகிறது.

எனவே இங்கு

நுண் பகுதிப் பருமம்

$$= \pi x^2 \triangle y$$

$$\text{பருமம்} = \pi \int_{-b}^{b} x^2 \, dy.$$

$$= \pi \int_{-b}^{b} \frac{a^2}{b^2} (b^2 - y^2) \, dy$$

$$= \frac{\pi a^2}{b^2} \times 2 \int_{0}^{b} (b^2 - y^2) \, dy$$

$$= \frac{2 \pi a^2}{b^2} \left[ b^3 - \frac{b^3}{3} \right]$$

$$\frac{4 \pi a^2 b^3}{3 b^2}$$

$$= \frac{4}{3} \pi a^2 b.$$

**குறிப்பு.**—இங்கு $y$ — அச்சை சுற்றி வரும் உருளைக்கு ஒரு எடுத்துக்காட்டு விளக்கப் பட்டிருக்கிறது. நுண்பகுதிப் பருமம் $= \pi x^2 \triangle y$. (9·2 காண்க).

## பயிற்சிகள் 12

**உருளைப் பருமம்.**—தொகை முறையில் காண்க :

1. ஒரு கோளத்தின் பருமமும், ஒரு வட்டமட்டக் கூம்பின் பருமமும் காண்க.

2. ஆய ஆதிமுதல் $x = a$ என்ற குத்தாயம் வரை $x$-அச்சுக்கும் $y^2 = 4ax$-க்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு, $x$-அச்சை ஒரு முறை சுற்றுகிறது. உருளைப் பருமம் காண்க.

3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற அதிபர வளையத்தின் ஒரு கிளைக்கும், $(a, o)$ முதல் $x = h$ வரையில் இடைப்பட்ட பரப்பு, $x$—அச்சை ஒரு முறை சுற்றுகிறது. உருளைப் பருமம் $\frac{\pi b^2 h^2 (3a + h)}{3a^2}$ என நிறுவுக.

4. கீழ்க்கண்ட அரை வளையங்கள் $x$—அச்சை ஒரு முறை சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளைப் பருமங்கள் காண்க :

(i) $ay^2 = x^2 (a - x)$.
(ii) $y^2 = x^2 (1 - x^2)$.
(iii) $y^2 = x^2 \left(\frac{a - x}{a + x}\right)$.

5. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$-ன் முதல் வட்ட நாற்கூற்றில் உள்ள பரப்பு, $x$—அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் யாது ?

6. $y = \sin x$-ன் ஒரு முழுவில் $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் என்ன ?

7. $x + y = a$ என்ற கோட்டிற்கும் $x = \frac{1}{2}a$ என்ற குத்தாயத்திற்கும் $x$-அச்சுக்கும் இடைப்பட்ட பரப்பு $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் என்ன ? அதே பரப்பு $y$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் என்ன ?

8. ஒரு கோளத்தின் பகுதி (வெட்டப்பட்டது) உயரம் $h$ ; அதன் வட்டமட்டத்தின் அரைவிட்டம் $c$. அதன் பருமம் $\frac{\pi h}{6} (3c^2 + h^2)$ என நிறுவுக.

9. ஒரு அரைக் கோளம் (அரை விட்டம் $a$) அடி வட்ட மட்டத்திற்கு ஒரு போகுடைய ஒரு மட்டத்தால் வெட்டப் படுகிறது. ஒரு பகுதியின் உயரம் $x$. இரண்டு பகுதிகளும் சமப்பருமம் உடையனவாயின் $x^3 - 3a^2x + a^3 = 0$ என நிறுவுக.

10. கீழ்க்கண்ட பரப்பு $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளைப்பருமம் காண்க :—

(i) $x = a(\theta + \sin\theta)$ ; $y = a(1 - \cos\theta)$ ; ஒருமுழுவில்.

(ii) $x = a\left[\text{Log cot}\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\theta\right]$; $y = a\sin\theta$.

(iii) $x = t^3$ ; $y = t - \frac{t^2}{3}$.

(iv) $y^2(a + x) = x^2(3a - x)$.

11. $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளை முதற் கோட்டை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் காண்க.

12. $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ என்ற வளை வரையின் ஒரு வளையம் (*i*) முதற் கோடு (*ii*) $\theta = \frac{\pi}{2}$ என்ற கோட்டினைச் சுற்றினால் ஏற்படும் உருளையின் பருமங்கள் காண்க.

13. $r = a + b\cos\theta$ $(a > b)$ என்ற வளைவரை முதற் கோட்டை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் $\frac{4}{3}\pi a(a^2 + b^2)$ என நிறுவுக.

14. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டம், $y$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் என்ன ?

15. $x = a(\theta - \sin\theta)$ ; $y = a(1 - \cos\theta)$ ன் அரைவில் மீப்பெருகுத்தாயத்தை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளையின் பருமம் $\pi a^3 (\frac{3}{2}\pi^2 - \frac{2}{3})$ என நிறுவுக.

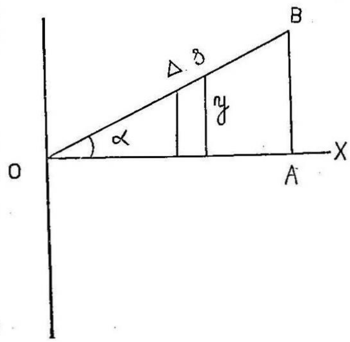
16. $y^2 = x^3$க்கும், $x^2 = y^3$ க்கும் இடைப்பட்ட பொதுப் பரப்பு, $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் பருமம் என்ன ?

பகுதி 13

# உருளைகளின் புறப்பரப்புக்கள்

***13·1*** *எடுத்துக் காட்டு :*

(1) மையகோணம் $a$ ; கீழ்மட்ட அரைவிட்டம் $a$ ; உள்ள ஒரு கூம்பின் மேற்பரப்பு என்ன. (9·14 காண்க)




படத்தில் காட்டிய OAB என்ற செங்கோண முக்கோணம் $x$ அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் கூம்பு கிடைக்கும்.

OB-ன் சமன்பாடு $y = x \tan a$.

நுண் பகுதிப் பரப்பு $= 2\pi y \triangle s$

$$= 2\pi y \frac{\triangle s}{\triangle x} \triangle x$$

இங்கு $$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \tan^2 a}$$

$$= \sec a.$$

$$\therefore \text{பரப்பு} = 2\pi \int_0^{a \cot a} y \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \int_0^{a \cot a} x \tan a . \sec a \, dx$$

$$= 2\pi \tan a \sec a \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{a \cot a}$$

$$= \frac{2\pi \tan a \sec a.\ a^2 \cot^2 a}{2}$$

$$= \pi a^2 \sec a \cot a.$$

$$= \pi a^2 \operatorname{cosec} a$$

$= \pi$ al. [$l. = a \operatorname{cosec} a$ = கூம்பின் சாய் நீளம்].

(2) $r = a(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளைவரை, தன் முதற்கோட்டை ஒருமுறை சுற்றினுல் வரும் உருளையின் புறப் பரப்பு என்ன ?

(படம் : 10.21 காண்க).

$\theta = 0$ ; $r = 2a$

$\theta = \pi$ ; $r = 0$

என்ற எல்லைக்குட்பட்டது.

நுண்தொகைப் புறப்பரப்பு $= 2\pi y \Delta s$.

$$= 2\pi \int_0^{\pi} y \frac{ds}{d\theta}\, d\theta.$$

போலார் விதிப்படி,

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2}$$

$$= \sqrt{a^2(1 + \cos\theta)^2 + a^2 \sin^2\theta}$$

$$= \sqrt{4\, a^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}$$

$$\frac{ds}{d\theta} = 2a \cos\frac{\theta}{2}.$$

$$y = r \sin\theta$$

$$= a(1 + \cos\theta)\sin\theta$$

$$= a \cdot 2\cos^2\frac{\theta}{2} \cdot 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$

$$= a \cos^3\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2}.$$

$$\therefore \text{ பரப்பு } = 2\pi\int_0^{\pi} 4a\cos^3\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}\,.\,2a\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 16\pi a^2\int_0^{\pi}\cos^4\frac{\theta}{2}\ \sin\frac{\theta}{2}\,d\theta$$

$$= 32\pi a^2\left[\frac{-\cos^5\frac{\theta}{2}}{5}\right]_0^{\pi}$$

$$= \frac{-32}{5}\pi a^2.(0-1)$$

$$= \frac{32}{5}\pi a^2.$$

(3) $8a^2y^2 = x^2(a^2-x^2)$ என்ற வளைவரையின் ஒரு வளையம் $x$— அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் உண்டாகும் உருளையின் புறப்பரப்பு என்ன ?

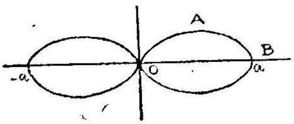
வளைய அமைப்பை முதலில் காண்போம்.

(1) $x, y$ இரண்டும் இருபடிச் சார்புகளாக உள்ளன. ஆகவே வளைவரை, இரு அச்சுக்களுக்கும் சமச் சீர் பெற்றது.

(2) $x=0, y=0$ வழியாகவும் ; $x=\pm a, y=0$ வழியாகவும் வளைவரை செல்லும்.

(3) $|x|>a$ ஆனால், $y$ கற்பனை மதிப்புப் பெறும். ஆகவே வளைவரை, $x=a$-க்கு வலது பக்கத்திலும், $x=-a$ க்கு இடது பக்கத்திலும் செல்லாது.

இரண்டு வளையங்கள், படத்தில் காட்டியபடி, இருக்கும்.



படம்-16

O A B என்ற வளைகோடு, $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் வரும் புறப்பரப்பு காண வேண்டும்.

$$\text{நுண்பகுதிப் புறப்பரப்பு } = 2\pi y\,\Delta s$$

$$= 2\pi y\,\frac{\Delta s}{\Delta x}\,\Delta x.$$

$$\therefore \text{ புறப்பரப்பு } = 2\pi\int_0^{a} y\,\frac{ds}{dx}\,dx.$$

இப்போது, $\frac{ds}{dx}$ காண வேண்டும்.

$$8\,a^2\,y^2 = x^2\,(a^2 - x^2)$$

$$\therefore\quad 16\,a^2\,y\,\frac{dy}{dx} = 2\,x\,(a^2 - x^2) - 2\,x^3$$

$$= 2\,x\,a^2 - 4\,x^3$$

$$\therefore\quad \frac{dy}{dx} = \frac{x\,a^2 - 2\,x^3}{8\,a^2\,y}$$

$$\therefore\quad \frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)^2}$$

$$= \sqrt{1 + \left(\frac{x\,a^2 - 2\,x^3}{8\,a^2\,y}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{64\,a^4\,y^2 + x^2\,(a^2 - 2\,x^2)^2}{64\,a^4\,y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\,a^2\,x^2\,(a^2 - x^2) + x^2\,(a^2 - 2\,x^2)^2}{8\,a^2\,y}}$$

$$= \sqrt{\frac{8\,a^4\,x^2 - 8\,a^2\,x^4 + a^4\,x^2 - 4\,x^4\,a^2 + 4\,x^6}{8\,a^2\,y}}$$

$$= \sqrt{\frac{4\,x^6 - 12\,x^4\,a^2 + 9x^2\,a^4}{8\,a^2\,y}}$$

$$= \frac{2\,x^3 - 3\,a^2\,x}{8\,a_2\,y}$$

$$\therefore\ \text{புறப்பரப்பு} = 2\pi \int_0^a y\,.\,\frac{(2\,x^3 - 3\,a^2\,x)}{8\,a^2\,y}\,dx$$

$$= \frac{2\,\pi}{8\,a^2}\left[\frac{2\,x^4}{4} - \frac{3\,a^2\,x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{\pi}{4\,a^2}\left[\frac{a^4}{2} - \frac{3\,a^4}{2}\right]$$

$$= \frac{\pi}{8\,a^2} \times -2\,a^4$$

$$= -\frac{\pi\,a^2}{4}$$

— குறியை விட்டுவிட்டால்,

$$\text{புறப்பரப்பு} = \frac{\pi a^2}{4}$$

குறிப்பு :—எல்லைகளை $o$ முதல் $a$ வரை என்பதற்குப் பதிவாக, $a$ முதல் $o$ வரை எனக்கொண்டால், பரப்பு $\frac{\pi a^2}{4}$ ஆகும்.

பொதுவாக, பரப்பு, நீளம், பருமம், புறப் பரப்பு கழிவெண் குறியோடுவரின், கழிவெண் குறியை விட்டு விடலாம்.

### பயிற்சிகள் 13

### உருளைப் புறப்பரப்பு : தொகை முறையில் காணல்.

**1.** பின் குறிப்பிட்ட வளைவரைகள், $x$ — அச்சை ஒரு முறை சுற்றினால் ஏற்படும் உருளைகளின் புறப்பரப்பு காண்க:

(i) $3ay^2 = x(x-a)^2$ ; ஒரு வளையம்.

(ii) $y^2 = 4ax$ ; $x = 0$ முதல் $x = a$ வரை.

(iii) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

(iv) $y = c \cosh \frac{x}{c}$ ; $x = 0$ முதல் $x = c$ வரை.

(v) $x=a(\theta-\sin\theta)$ ; $y=a(1-\cos\theta)$ ; ஒரு முழுவில்.

(vi) $x=a\cos^3 t$ ; $y=a\sin^3 t$.

**2.** பின் குறிப்பிட்ட வளைவரைகள் முதற் கோட்டை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளைகளின் புறப்பரப்பு காண்க :

(i) $r = 2 + \cos\theta$

(ii) $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ (ஒரு வளையம்).

(iii) $r = 4 + 2\cos\theta$.

**3.** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டம், $y$ — அச்சை.

ஒரு முறை சுற்றினால் ஏற்படும் உருளையின் புறப்பரப்பு என்ன ?

4. கீழ்க்கண்ட வளைவரைகள் குறிப்பிட்ட அச்சுக்களை ஒரு சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருளைகளின் புறப்பரப்பு காண்க :

(i) $x = a\,(\log \cot \theta - \cos 2\theta)$ ; $y = a \sin 2\,\theta$.

அதன் நீளத் தொடுவரையைச் சுற்றுகிறது.

(ii) $x = a\,(\theta - \sin\,\theta)$ ; $y = a\,(1 - \cos\theta)$ ;

$x = \pi a$ என்ற குத்தாயத்தைச் சுற்றுகிறது :

$y = 2a$ என்ற தொடுவரையைச் சுற்றுகிறது :

(iii) $r = a\,(1 + \cos\theta)$ ; சுற்றும் பகுதி $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ ; $= \pi$ என்ற அச்சைச் சுற்றுகிறது :

(iv) $y^2 = 4\,ax$ என்ற தொடுவளை, $x = o$ முதல், இரட்டைக்குத்தாயம் $x = a$ வரை இடைப்பட்ட பகுதி ; $x = o$ என்ற தொடுவரையைச் சுற்றுகிறது.

பகுதி 14

# புவிக் கவர்ச்சி மையம்

## (Centre of gravity)

1·41 நிலைப் பொருளியிலில் (statics) பின் கூறப்படும் தேற்றம் நிறுவப்பட்டிருக்கும்:

"$m_1$, $m_2$,......$m_n$ என்ற பொருண்மைகளின் $\frac{\text{பொருண்மை மையம்}}{\text{புவிக் கவர்ச்சி மையம்}}$ $(x_1\ y_1)$, $(x_2\ y_2)$, .........$(x_n, y_n)$ என்ற இடங்களில் இருக்குமானல், அப்பொருண்மைக் கூட்டத்தின் $\frac{\text{பொருண்மை மையம்}}{\text{புவிக் கவர்ச்சி மையம்}}$ ;

$$\bar{x} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m\ x_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r},$$

$$\bar{y} = \frac{\sum_{r=1}^{n} m_r\ y_r}{\sum_{r=1}^{n} m_r}$$

என்ற இடத்தில் இருக்கும்."

14·2 இங்கு $m_1$, $m_2$,............$m_n$ என்பவை தனித்தனிப் பொருள்களாக விறைப்பாக இணைக்கப்பட்ட ஒரு பொருண்மைக் கூட்டம். ஆனல் அவை தனித்தனிப்

பொருண்மைகளாக வல்லாமல், தொடர்ச்சியான, பரப்பு, பருமம், புறப்பரப்பு, நீளம் உள்ள ஒரே பொருண்மையாக விருக்குமானால், மேற்கூறிய $\sum$ என்பது $\int$ ஆன வரையறுத்த தொகையாகக் கொள்ளப்படும்.

குறிப்பு.—வேறொன்றும் கூறப்படாவிடத்து, பொருள்களின் செறிவு சமச்செறி வெனவே கொள்ளப்படும்.

### பு.க. மையம் காணும் முறை.

$m_1, m_2, \ldots m_n$ க்குப் பதிலாக, ஒரு நுண் பகுதிப் பொருண்மை $\Delta m$ எனக் கொள்வோம். அப் பகுதியின் பு.க. மையத்தின் ஆயத் தொலைகள் $(x, y)$ எனக் கொள்வோம். சென்ற பத்தியில் கூறியபடி,

$$\bar{x} = \frac{\sum m_r x_r}{\sum m_r}$$

$$= \frac{\sum \Delta m \cdot x}{\sum \Delta m}$$

$$= \frac{\int x \, dm}{\int dm} \text{ (குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள்)}$$

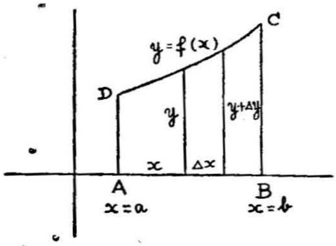
அவ்வாறே,

$$\bar{y} = \frac{\int y \, dm}{\int dm} \text{ (குறிப்பிட்ட எல்லைகளுக்குள்).}$$

**சில குறிப்பிட்ட பொருள்களின் நுண்பகுதிப் பொருண்மை காணும் விதமும், பு.க. மையம் காணும் முறையும் :**

இங்கு $\rho$ என்பது செறிவைக் குறிக்கும். சமச்செறிவுடைய பொருள்களானால், $\rho$ ஒரு மாறிலி. $\int$ குறிக்குள் $\rho$ வருமானால், அதை குறிக்கு வெளியே கொண்டுவந்து, ஒரு மாறிலியாகக் கொள்ளலாம்.

ஆனால் சில பொருள்களின் செறிவு $\rho$ ஒரு மாறிலியாக வல்லாமல், அதன் $(x, y)$ ஆயத் தொலைகளைப் பொருத்திருக்கலாம். அதாவது $\rho = \mathrm{K} f(x)$ என்றோ, $\rho = \mathrm{K} f(y)$ என்றோ, $\rho = \mathrm{K} f(x, y)$ என்றோ இருக்கலாம். அப்போது $\int$ குறிக்குள் $\rho$ வருமானால், அதை அக்குறிக்குள்ளேயே கொண்டு விடை காணவேண்டும்.



படம்-18

படத்தில் காட்டப்பட்ட பரப்பு ABCD என்பது, $y = f(x)$ என்ற வளைவரைக்கும் $x$-அச்சுக்கும், $x = a$, $x = b$ என்ற குத்தாயங்களுக்கு இடைப்பட்டது.

DC என்பது வளைவரைக் கோடு (நீளம்).

| விவரங்கள் | புவிக் கவர்ச்சி மையம் : $(\bar{x}, \bar{y})$ |
|---|---|

14.31

1. பரப்பு ABCD

நுண் பகுதிப்பரப்பு $= \Delta A = y\Delta x$

$\Delta m$, ,, பொருண்மை $= y\,\rho\,\Delta x$

,, பொருண்மையின்

பு.க. மையம் $x = x$, $y = \dfrac{y}{2}$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b xy\rho\, dx}{\int_a^b y\rho\, dx}$$

$$\bar{y} = \frac{\int_a^b \frac{y^2}{2}\rho\, dx}{\int_a^b y\rho\, dx}.$$

2. பரப்பு ABCD, $x$ — அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் உருளைப் பருமம்.

நுண்பகுதிப் பருமம் $= \Delta V = \pi y^2 \Delta x$

$\Delta m$, ,, பொருண்மை $= \pi y^2 \rho \Delta x$

,, பொருண்மையின் பு.க: மையம்.

$$\left.\begin{array}{l} x = \bar{a} \\ y = o \end{array}\right\}$$

$$\bar{x} = \frac{\int_a^b \pi y^2 x\rho\, dx}{\int_a^b \pi y^2 \rho\, dx}.$$

$$\bar{y} = o.$$

இவ்வுருளையின் பருமம், $x$ — அச்சுக்குச் சமச் சீர் பெற்றது.

| விவரங்கள். | புவிக்கவர்ச்சி மையம் : $(\bar{x}, \bar{y})$ |
|---|---|
| 3. பரப்பு ABCD, $x$–அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினால் பெறப்படும் உருளையின் புறப்பரப்பு. நுண்பகுதிப் புறப்பரப்பு $= \triangle S = 2\pi\, y \triangle s$<br>$\triangle m$, ,, பொருண்மை $= 2\pi\, y\, \rho \triangle s$<br>,, பொருண்மையின் பு.க. மையம் $x = x$, $y = o$<br>இவ்வுருளையின் புறப்பரப்பு, $x$–அச்சுக்குச் சமச் சீர் பெற்றது. | $\bar{x} = \dfrac{\int_a^b 2\pi\, yx\, \rho \dfrac{ds}{dx}\, dx}{\int_a^b 2\pi y\, \rho \dfrac{ds}{dx}\, dx}$.<br>$\bar{y} = o.$ |
| 4. வளைவரை நீளம் DC: நுண் பகுதி நீளம் $= \triangle s$<br>$\triangle m$, ,, பொருண்மை $= \rho \triangle s$<br>,, பொருண்மையின் பு.க. மையம், $x = x$, $y = y$. | $\bar{x} = \dfrac{\int_a^1 x\rho \dfrac{ds}{dx}\, dx}{\int_a^b \rho \dfrac{ds}{dx}\, dx.}$<br>$\bar{y} = \dfrac{\int_a^b y\rho \dfrac{ds}{dx}\, dx}{\int_a^b \rho \dfrac{ds}{dx}\, dx.}$ |

**குறிப்பு.**—மேற்கூறியவற்றில், $\rho$ ஒரு மாறிலியாயின் (அதாவது சமச் செறிவுடைய பொருளாயின்), மேலும் கீழும் தோன்றும் $\rho$, ஒன்றுக்கொன்று நீக்கிக் கொள்ளும்.

**14·4** எடுத்துக் காட்டு:

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டத்தின் முதல் வட்ட நாற்கூற்றின் பரப்புக்கு பு.க. மையம் காண்க.

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= y\, \rho \triangle x$.

**நுண்** பகுதிப் பொருண்மையின் பு.க. மையம் $x = x$

$$y = \frac{y}{2}.$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int_0^a xy\,\rho\,dx}{\int_0^a y\,\rho\,dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x\cdot\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\ \ dx.}{\frac{\pi\ ab}{4}}$$

$$= \quad \frac{4}{\pi\,ab}\cdot\frac{b}{a}\times -\tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{3}\left[(a^2-x^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^a$$

$$= \frac{4\,a}{3\,\pi}.$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^a \frac{y^2}{2}\,\rho\,dx}{\frac{\pi\ ab}{4}\,\rho}$$

$$= \frac{4}{\pi\,ab}\cdot\ \frac{1}{2}\int_0^a \frac{b^2}{a^2}\,(a^2-x^2)\ dx$$

$$= \frac{2}{\pi\,ab}\cdot\ \frac{b^2}{a^2}\left(a^2x-\frac{x^3}{3}\right)_0^a$$

$= \dfrac{4b}{3\pi}$ . $\therefore$ பு.க. மையம் $\left(\dfrac{4a}{3\pi}\ ,\ \dfrac{4b}{3\pi}\right)$

இங்கு $\int_0^a ydx = \dfrac{\pi\,ab}{4}$ எனக் கொள்ளப்பட்டது ; ஏனெனில் ஒரு நீள் வட்டத்தின் முழுப் பரப்பு $= \pi\,ab.$

இவ்வாறே, மற்ற கணக்குகளிலும், கீழெண்ணுகவுள்ள வரையறைத் தொகையான பொருண்மை நமக்குத் தெரியுமானல், அதைக் கொள்ளலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

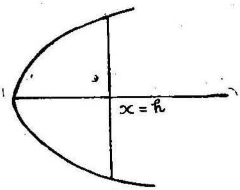
ஒரு அரை வட்டத்தின் பரப்பு $\frac{\pi a^2}{2}$ ;

ஒரு அரைக் கோளத்தின் பருமம் $\frac{2}{3}\pi a^3$;
ஒரு அரைக் கோளத்தின் புறப்பரப்பு $2\pi a^2$;
ஒரு கூம்பின் பருமம் $\frac{1}{3}\pi a^2 h$
போன்றவைகளை நாம் கொள்ளலாம்.

2. $x = h$ என்ற இரட்டைக்குத்தாயத்திற்கும் $y^2 = 4ax$ என்ற தொடுவளைவுக்கும் இடைப்பட்டபரப்பின் பு.க. மையம் காண்க.

இப்பரப்பு, $x$–அச்சுக்கு சமச் சீர் பெற்றதாதலின்

$\bar{y} = 0$.



படம் - 19

$$\bar{x} = \frac{\int_0^h 2x\, y\, \rho\, dx}{\int_0^h 2y\, \rho\, dx.}$$

மேலும் கீழுமுள்ள $2\rho$, ஒன்றையொன்று நீக்கிக்கொள்ளும்.

$$\int_0^h xy\, dx = \int_0^h x \cdot 2\sqrt{a}\ \sqrt{x}\ dx$$

$$= 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{5}\left[x^{5/2}\right]_0^h$$

$$= \frac{4\sqrt{a}\ h^{5/2}}{5}$$

$$\int_0^h y\, dx = \int_0^h 2\sqrt{a}\ \sqrt{x}\ dx$$

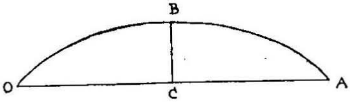
$$= 2\sqrt{a} \cdot \frac{2}{3}\left[x^{\frac{3}{2}}\right]_0^h$$

$$= \frac{4\sqrt{a}\ h^{3/2}}{3}$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{4\sqrt{a}\, h^{\frac{5}{2}}}{5} \cdot \frac{3}{4\sqrt{a}\, h^{3/2}} = \frac{3h}{5}$$

$$\bar{y} = 0$$

3. உருள்வளை $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1 - \cos\theta)$ இதன் பரப்பின் பு.க. மையம் காண்க.




படம்-20

$OA = 2\pi a$

உருள்வளையின் கூறுபடி,

O A-ன் மையம் C ஆனால், C B என்ற குத்தாயத்தை யொட்டி, உருள்வளை சமச்சீர் பெற்றது.

எனவே, O என்பதை ஆய ஆதியாகக் கொண்டால்

$$\bar{x} = OC$$
$$= a\pi.$$

$$\bar{y} = \frac{\int_0^{2\pi a} \frac{y^2}{2} \rho\, dx}{\int_0^{2\pi a} y \rho\, dx.}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta} d\theta}{\int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta} d\theta}$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} y^2 \frac{dx}{d\theta}\, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} a^2 (1 - \cos\theta)^2\, a\,(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{2} a^3 \int_0^{2\pi} 8 \sin^6 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4\,a^3 \int_0^{2\pi} \sin^6 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 4\,a^3 \int_0^{\pi} \sin^6 \phi \cdot 2d\,\phi \left[\frac{\theta}{2} = \phi \text{ ஈடு செய்க}\right]$$

$$= 16\,a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \phi\, d\,\phi$$

$$= 16\,a^3 \cdot \frac{5 \cdot 3 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{5\,\pi\,a^3}{2}\,.$$

$$\int_0^{2\pi} y \frac{dx}{d\theta}\, d\theta = \int_0^{2\pi} a\,(1 - \cos\theta)\, a\,(1 - \cos\theta)\, d\theta$$

$$= a^2 \int_0^{2\pi} 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}\, d\theta$$

$$= 16\,a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \phi\, d\,\phi$$

$$= 16\,a^2 \cdot \frac{3 \,.\, 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

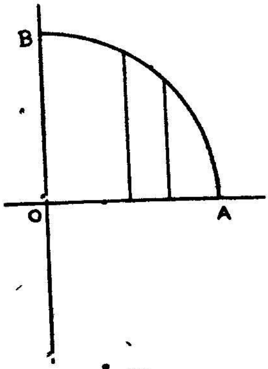
$$= 3\,\pi a^2$$

$$\therefore\ \bar{y} = \frac{5\,\pi a^3}{2 \cdot 3\,\pi a^2} = \frac{5a}{6}\,.$$

∴ பு.க. மையம் ஆயத் தொலைகள்

$$\bar{x} = a\,\pi$$

$$\bar{y} = \frac{5a}{6}.$$



படம்.21

4. ஒரு அரைக் கோளப் பருமத்தின் பு.க. மையம் காண்க. அரைவிட்டம் A.

O A B என்ற வட்ட நாற்கூறு $x$ அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினுல் அரைக் கோளம் கிடைக்கும். வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$. $x$-ன் எல்லைகள் O முதல் A வரை.

இது ஒரு உருளைப் பருமம்; இதன் பருமம் $\frac{2}{3}\pi a^3$; இதன் பொருண்மை $\frac{2}{3}\pi a^3 \rho$; இது $x$–அச்சுக்குச் சமச்சீர் பெற்றது; எனவே $\bar{y} = 0$.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a \pi y^2 x \rho \, dx}{\frac{2}{3}\pi a^3 \rho}$$

$$= \frac{\int_0^a x(a^2 - x^2)\, dx}{\frac{2}{3} a^3.}$$

$$= \frac{3}{2a^3}\left[a^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^a$$

$$= \frac{3}{2a^3} \cdot \frac{a^4}{4}$$

$$= \frac{3a}{8}.$$

அதாவது ஒரு அரைக் கோளப் பருமத்தின் பு.க. மையம், அதன் மட்ட வடியிலிருந்து, மட்ட வடி மையம் வழியாக செங்குத்தாக உயரும் அரை விட்டத்தில் $\frac{3a}{8}$ உயரத்தில் இருக்கும்.

5. சென்ற கணக்கில் கொண்ட அரைக் கோளத்தின் புறப்பரப்பிற்கு பு.க. மையம் காண்க.

முன் போலவே $\bar{y} = 0$

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a 2\pi xy \frac{ds}{dx} dx.\rho}{2\pi a^2 \rho}$$

$$= \frac{1}{a^2} \int_0^a xy \frac{ds}{dx} dx.$$

இங்கு $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

$$= \frac{a}{y}.$$

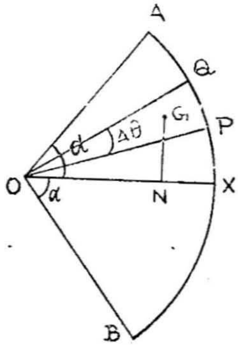
$$\therefore \bar{x} = \frac{1}{a^2} \int_0^a xy \frac{a}{y} dx.$$

$$= \frac{1}{a} \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a$$

$$= \frac{a}{2}.$$

அதாவது மட்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து செங்குத்தாக உயரும் அரை விட்டத்தின் சரிபாதியில் பு.க. மையம் இருக்கிறது.

6. $a$ அரை விட்டம் உள்ள ஒரு வட்டத்தில் நடுக்கோணம் $2\alpha$ உள்ள ஒரு வட்டப் பகுதி உள்ளது. (1) அதன் பரப்பு, (2) அதன் வளைவரை நீளம், இவற்றின் பு.க. மையம் காண்க.



படம்- 22

1. OA × B — பரப்பு

$\times \hat{OA} = \alpha = \times \hat{OB}$

$x$ — அச்சோடு இப்பரப்பு சமச்சீர் பெற்றது.

ஆகவே பு.க. மையம் O ×-ல் இருக்கும். அதாவது $\bar{y} = O$

$\times \hat{OP} = \theta ; \qquad \hat{POQ} = \Delta\theta$

நுண்பகுதிப் பரப்பு = POQ

$= \frac{1}{2} a^2 \Delta\theta$

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= \frac{1}{2} a^2 \rho \Delta\theta$

இந்நுண் பகுதியின் பு.க. மையம்

$$x = ON = OG \cos\theta$$

$$= \frac{2}{3} a \cos\theta$$

$$y = NG = \frac{2}{3} a \sin\theta$$

$$\bar{x} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} a^2 . \frac{2a}{3} \cos\theta\rho\, d\theta}{\int_{\alpha}^{\alpha} \frac{1}{2} a^2 \rho\, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2a}{3} \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos\theta\, d\theta}{\int_{\alpha} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2a}{3}\Big[\sin\theta\Big]_{-a}^{a}}{2a}$$

$$= \frac{2a \sin a}{3a}$$

$\bar{y} = 0$ எனக் கூறப்பட்டது. ஆனால் இங்கு அதை நேரடியாகக் காண்போம்.

$$\bar{y} = \frac{\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} a^2 \frac{2a}{3} \sin\theta \, \rho \, d\theta}{\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} a^2 \rho \, d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2a}{3}\int_{-a}^{a} \sin\theta \, d\theta}{\int_{-a}^{a} d\theta}$$

$$= \frac{\frac{2a}{3}\Big[-\cos\theta\Big]_{-a}^{a}}{2a}$$

$$= 0$$

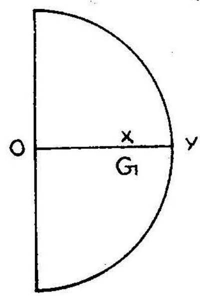
ஆனால் சமச் சீர்ப்பண்பைப் பயன்படுத்தி $\bar{y} = 0$ என்று சொன்னாலே போதுமானது. இவ்வாறு நிறுவிக்காட்டவேண்டிய தேவையில்லை.

**சிறப்பு வகைகள் :**

(i) $a = \frac{\pi}{2}$ ஆனால் ஒரு அரைவட்டவடிவத் தகடு கிடைக்கும். அதன் பு.க. மையம்,

$$\bar{x} = \frac{2a \sin\frac{\pi}{2}}{3.\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$




படம் - 23

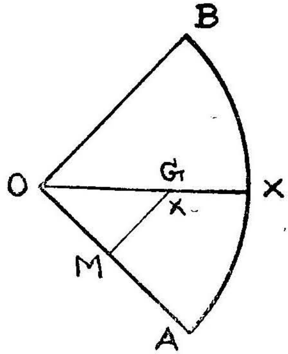
படத்தில் $OG = \frac{4a}{3\pi}$

(ii) $a = \frac{\pi}{4}$ எனக் கொண்டால், ஒருகால் வட்ட வடிவத் தகடு கிடைக்கும். அதன் பு.க. மையம்,

$$\bar{x} = \frac{2a \sin\frac{\pi}{4}}{3\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{8a}{3\sqrt{2}\,\pi} = \frac{4\sqrt{2}\,a}{3\pi}$$

படத்தில் $OG = \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a.$




படம் - 24

oA என்பதை $x$ — அச்சாகக் கொண்டால், பு.க. மையம்

$$\bar{x} = oM = OG\cos\frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{4\sqrt{2}}{3\pi}a \, . \, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = MG = oG\sin\frac{\pi}{4}$$

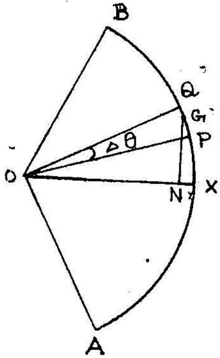
$$= \frac{4a}{3\pi}.$$

எனவே, O A, O B என்பவற்றை முறையே $x, y$ — அச்சாகக் கொண்டால்,

$$\text{பு. க. மையம் } \bar{x} = \frac{4a}{3\pi}$$

$$\bar{y} = \frac{4a}{3\pi}.$$

*(2)* இப்போது மையக் கோணம் $2a$ உள்ள வளைவரைக் கம்பி AB-ன் பு.க. மையம் காண்போம்.



படம்-25

$\hat{XOP} = \theta.$

$\hat{POQ} = \triangle\theta.$

$\angle XOB = a = \angle XOA$

நுண்பகுதி நீளம் $= PQ.$

$= a\triangle\theta$

நுண்பகுதிப் பொருண்மை $= a\rho\triangle\theta$

அப்பகுதியின் பு.க. மையம்,

$ON = x = a\cos\theta.$

$NG = y = a\sin\theta.$

ஆனால் சமச் சீர்ப்பண்பால் $\bar{y} = 0.$

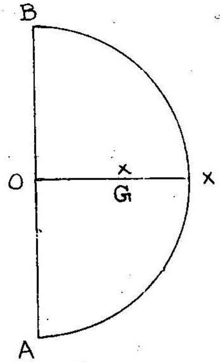
$$\bar{x} = \frac{\int_{-a}^{a} a.\, a\cos\theta.\, P\, d\theta}{\int_{-a}^{a} a P\, d\theta}$$

$$= \frac{a\,[\sin\theta]_{-a}^{a}}{2a}$$

$$= \frac{a\sin a}{a}.$$

**சிறப்பு வகைகள் :**

(i) $a = \frac{\pi}{2}$ ஆனால் ஒரு அரைவட்டக் கம்பி பெறப்படும்.



படம் 26

அதன் பு.க. மையம் $\bar{x} = \frac{a \sin \frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

படத்தில், AXB வடிவமுள்ள அரை வட்டக் கம்பியின் பு.க. மையம் G.

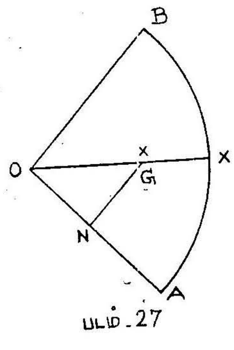
$$OG = \frac{2a}{\pi}$$

(ii) $a = \frac{\pi}{4}$, ஆனால், ஒரு கால் வட்ட வடிவமுள்ள கம்பியின் பு.க. மையம் கிடைக்கும்.

$$\bar{x} = \frac{a \sin \frac{\pi}{4}}{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{4a}{\pi\sqrt{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a.$$



படம் 27

படத்தில் $OG = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} a.$

இப்போது OA, OB என்பவற்றை முறையே $x$, $y$-அச்சுகளாகக்கொண்டால்,

$$\bar{x} = ON = OG \cos \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

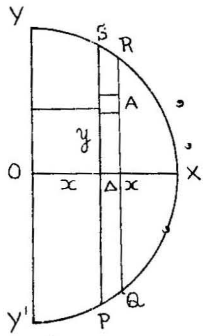
$$\bar{y} = NG = OG \sin \frac{\pi}{4}$$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

*14·41 (7)* இப்போது $\rho$ என்ற செறிவு ஒரு மாறிலியாக வல்லாமல், ஒரு மாறியாக இருக்கும்போது, பு.க. மையம் காணும் வகையை சில எடுத்துக்காட்டுகளால் விளக்குவோம்:

ஒரு அரை வட்டப் பரப்பில், செறிவு, ஒவ்வோர் இடத்திலும் வரம்பு விட்டத்திலிருந்து உள்ள தூரத்திற்குத் தகவுப் பொருத்தமுடையதாயுள்ளது. அவ்வரை வட்டப் பரப்பின் பு.க. மையம் காண்க.

$YY^1$ — வரம்பு விட்டம். இப்போது PQRS என்ற ஒரு நுண்பகுதிப் பரப்பை எடுத்துக் கொண்டால், அதிலுள்ள ஒவ்வொரு சிறு பகுதியும், $YY^1$ லிருந்து $x$-தூரத்தில் உள்ளது.



படம். 28

இப்பகுதி நுண் பரப்பு $= 2y \triangle x$. இப்பகுதியில் செறிவு $= Kx$ (K — ஒரு மாறிலி)

$\therefore$ நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= 2y\,Kx \triangle x$. இப்பகுதிப் பொருண்மையின் பு.க. மையம்,

$$x = x.$$
$$y = 0.$$

மேலும் O X க்குச் சமச் சீர் பெற்றிருக்கு மாதலால், $\bar{y} = 0$ எனவே கொள்ளலாம்.

$$\bar{x} = \frac{\int_0^a 2\,xy\,Kx\,dx.}{\int_0^a 2\,xy\,K\,dx.}$$

$$= \frac{\int_0^a x^2y\;dx}{\int_0^a xy\;dx}$$

உருவத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = x^2$

$$\therefore\ y = \sqrt{a^2 - x^2}$$

$$\therefore\ \bar{x} = \frac{\int_0^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2}\, dx}{\int_0^a x \sqrt{a^2 - x^2}\, dx}$$

$x = a \sin\theta$ ஈடு செய்தால்,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\pi/2} a^4 \sin^2\theta \cos^2\theta\, d\theta}{\int_0^{\pi/2} a^3 \sin\theta \cos^2\theta\, d\theta}$$

$$= \frac{a \cdot \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}}{\frac{1 \cdot 1}{3 \cdot 1}}$$

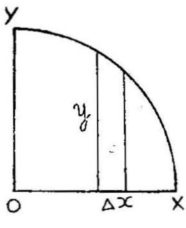
$$= \frac{3a\pi}{16}$$

$$\bar{y} = 0.$$

எனவே OX ன் மேல், G இருக்கும்; $OG = \frac{3a\pi}{16}$.

மற்ருேர் எடுத்துக்காட்டு:

$a$ அரைவிட்டமுள்ள ஒரு அரைக் கோளம். அதன் செறிவு, அடிமட்ட வட்டத்திலிருந்துள்ள தூரத்தின் இரு படிக்குத் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அதன் பு.க. மையம் காண்க.



படம் - 29

வட்டநாற் கூறுபகுதி $XOY$, $x$-அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினல் அரைக்கோளம் பெறப்படும்.

நுண் பகுதிப் பருமம் $= \pi y^2 \triangle x$

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= \pi y^2\ kx^2 \triangle x$

சமச் சீர்ப் பண்புப்படி, பு.க. மையம் $OX$-ன் மேல் இருக்கும். ஆகவே $y = o$.

நுண் பகுதிப் பொருண்மையின் பு.க. மையத்தின் $x$—ஆயத் தொலே $= x$.

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{\int_0^a \pi x^2 y^2 \ k \, dx}{\int_0^a \pi x^2 y^2 \ k \, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x^3 y^2 \, dx}{\int_0^a x^2 y^2 \, dx}$$

$$= \frac{\int_0^a x^3 (a^2 - x^2) \, dx}{\int_0^a x^2 (a^2 - x^2) \, dx}$$

$$= \frac{\frac{a^6}{4} - \frac{a^6}{6}}{\frac{a^5}{3} - \frac{a^5}{5}}$$

$$= \frac{5a}{8}$$

அதாவது பு.க. மையம், அடிமட்ட வட்டத்தின் மையத்திலிருந்து செங்குத்தாக உயரும் அரைவிட்டத்தில் $\frac{5a}{8}$ தூரத்தில் இருக்கும்.

### பயிற்சிகள் 14

#### புவிக்கவர்ச்சி மையம்

1. கீழ்க்கண்ட பரப்புக்களின் புவிக்கவர்ச்சி மையம் காண்க. (வேறொன்றும் கூறப்படாவிடத்து, செறிவு சமச் செறிவெனக் கொள்க.)

(i) $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ ல் முதல் நாற் கூற்றுப் பரப்பு.

(ii) $y^2 = 4x$ ; $x^2 = 4y$ இரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட பொதுப்பரப்பு.

(iii) $y^2(a+x) = x^2(a-x)$; ஒரு வளையம்.

(iv) $r = a(1+\cos\theta)$.

(v) $r = a\cos 2\theta$ (ஒரு வளையம்).

(vi) $\sqrt{x}+\sqrt{y} = \sqrt{a}$ ன் முதல் நாற்கூற்றுப் பரப்பு.

(vii) $y = \sin x$ ன் ஒரு வில்பரப்பு.

(viii) $y = x^3$; $y$–அச்சு; $y = 1$ இவைகளுக்கிடைப்பட்ட பரப்பு.

2. கீழ்க்கண்ட உருளைப் பருமங்களின் பு.க. மையம் காண்க. (சுமச் செறிவுடையன.)

(i) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2} = 1$; $x = 0$; $x = a$ இவைகளின் இடைப்பட்ட பரப்பு $x$–அச்சைச் சுற்றிவரும் உருளை.

(ii) $y = a\sin x$; $x = 0$; $x = \dfrac{\pi}{2}$ இவைகளின் இடைப்பட்ட பரப்பு $x$–அச்சைச் சுற்றிவரும் உருளை.

(iii) ஒரு வட்டம்; ஒரு தொடுவரையைச் சுற்றிவரும் உருளை.

(iv) $r = a(1+\cos\theta)$; முதற்கோட்டைச் சுற்றிவரும் உருளை.

3. கீழ்க்கண்ட உருளைகளின் புறப்பரப்பு, பு.க. மையம் காண்க. (சமச் செறிவுடையன.)

(i) $y^2 = 2ax$; $x = 0$; $x = a$ இடைப்பட்ட பரப்பு $x$–அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது.

(ii) $r = a(1+\cos\theta)$: முதற் கோட்டை ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது.

(iii) $x = a(\theta-\sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$; $y$–அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது.

4. ஒரு அரைவிட்டத் தகட்டின் செறிவு, விட்டத்திலிருந்து உள்ள தூரத்திற்குத் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அதன் பு.க. மையம் காண்க.

5. அடிமட்ட அரைவிட்டம் $a$, உயரம் $h$ உள்ள ஒரு கூம்பின் புறப்பரப்பு; செறிவு கூம்பின் உச்சியிலிருந்து உள்ள தூரத்திற்குத் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அப் பரப்பின் பு.க. மையம் காண்க.

6. $2a$ விட்டமுள்ள ஒரு வட்டத் தகடு; செறிவு ஒரு குறிப்பிட்ட தொடுவரையிலிருந்துள்ள தூரத்திற்குத் தகவுப் பொருத்தம் உடையது. அதன் பு.க. மையம், குறிப்பிட்ட தொடுவரையிலிருந்து $\frac{5a}{4}$ தூரம் உள்ளதென நிறுவுக.

பகுதி 15

# நிலை நெம்புத் திறன் (நி.நெ.தி.)
## (Moment of Inertia)

### 15·1 நிலை நெம்புத் திறன் : வரையறை :

m பொருண்மையுள்ள ஒரு நுண்பொருள் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிலிருந்து $r$ தூரம் இருக்குமானல், அக்கோட்டையொட்டி, அந்நுண்பொருளின் நி.நெ.தி. $mr^2$ என்பது வரையறை.

$m_1, m_2,$.....................என்ற பொருண்மையுள்ள நுண்பொருள்கள் ஒரு கொடுக்கப்பட்ட நேர்க்கோட்டிலிருந்து முறையே $r_1, r_2,$.............................தூரம் இருக்குமானல், அக்கோட்டையொட்டி, அந்நுண்பொருள் கூட்டத்தின் நி.நெ.தி.

$$m_1r_1^2 + m_2r_2^2 + \ldots\ldots = \Sigma\, mr^2$$

பல நுண்பொருள்கள் கூட்டமாகிய ஒரு பொருளை யெடுத்துக் கொண்டால், $\Sigma\, mr^2$ ஒரு வரையறைப்பட்ட தொகையாகும் (Definite integral). $\triangle M$ ஒரு நுண் பகுதிப் பொருண்மையானல் $\Sigma\, mr^2 = \Sigma \triangle Mr^2$

$$= \int r^2 dM$$

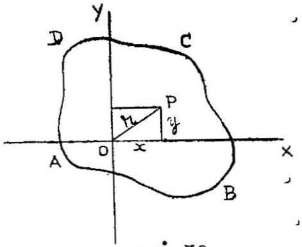
(உரிய எல்லைகளுக்குட்பட்டது)
எனவே $\int r^2 d\,M$ (உரிய எல்லைகளுக்குட்பட்டது) அக்கோட்டையொட்டி, அப்பொருளின் நி.நெ.தி. ஆகும்.

15·2 பொதுவாக, O X என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட அச்சையொட்டி, M என்ற பொருண்மையின் நி.நெ.தி. $MK^2$ எனக் கூறப்படும். K என்பது அவ்வச்சையொட்டி, அப்பொருளின் சுழற்சி அரைவிட்டம் (radius of gyration) எனக் கூறப்படும்.

சில குறிப்பிட்ட பொருள்களின் நி.நெ.தி. காண்பதற்கு முன்பாக, சில பொதுத் தேற்றங்கள் அறிதல் பயனுடைத்தாகும்.

15·3 செங்குத்தச்சுகள் தேற்றம் (Theorem of Perpendicular *axes*) :

A B C D என்ற தகட்டின் மட்டத்தின் *O* என்ற ஒரு புள்ளி உள்ளது. O X, O Y என்பவை, அதே மட்டத்திலுள்ள இரண்டு நேர்க்கோண அச்சுகள். O வழியாக அம்மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக O Z என ஒரு அச்சு உயர்த்தப்படுகிறது. (படத்தில் O Z காட்டப்படவில்லை.)




படம்-30

O X, O Y ஒட்டி, அத்தகட்டின் நி.நெ. திறன்கள் முறையே $I_x$, $I_y$ ஆனல், O Z ஒட்டி அத்தகட்டின் நி.நெ.தி. $I_x + I_y$ என்பது தேற்றம்.

தெரிப்பு : P $(x, y)$ என்ற இடத்திலுள்ள ஒரு நுண் பகுதிப் பொருண்மை $\triangle M$ எனக் கொள்க.

OX - ஒட்டி, $\triangle$ M-ன் நி.நெ.தி. $= \triangle M \cdot y^2$

OY - ஒட்டி, $\triangle$ M-ன் நி.நெ.தி. $= \triangle M \cdot x^2$

OX - ஒட்டி முழுத்தகட்டின் நி.நெ.தி.

$= \text{எல்லை} \sum \triangle M . y^2$

$\triangle M \longrightarrow o$

$= \int y^2 \, dM$ (உரிய எல்லைகளுக்குள்)

$= I_x$

அவ்வாறே,

OY ∫ ஒட்டி முழுத் தகட்டின் நி.நெ.தி.

$= \int x^2 \, dM$ (உரிய எல்லைகளுக்குள்)

$= I_y$ :

OZ - ஒட்டி முழுத் தகட்டின் நி.நெ.தி.

$= \text{எல்லை} \sum \triangle M \cdot OP^2$

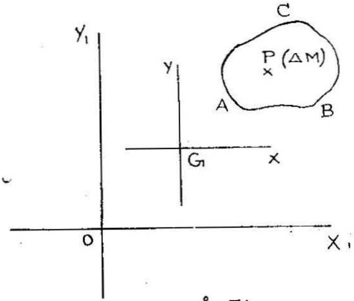
$\triangle M \longrightarrow o$

$= \int (x^2 + y^2) \, dM$ (உரிய எல்லைகளுக்குள்)

$= I_y + I_x$.

**15·4 தேற்றம் : ஒருபோகு அச்சுத்தேற்றம்** (Theorem of Parallel axes) :

M பொருண்மையுள்ள ஒரு பொருளின் பு. க. மையம் G. GX-ஒட்டி அப்பொருளின் நி. நெ. தி. $G_x$. O என்ற மற்றோர் புள்ளியின் வழியாக $OX_1$ என்ற அச்சு GX அச்சுக்கு ஒரு போகுடைத்து. GX, $OX_1$ இரண்டிற்கும் இடைப்பட்ட தூரம் $d$. அப்படியானுல் $OX_1$ – ஒட்டி, அப்பொருளின் நி. நெ. தி. $= G_x + Md^2$ என்பது தேற்றம்.




படம்–31

இத்தேற்றத்தை, ஒரு தகட்டிற்கு உண்மையென்று பொருத்திக்காட்டுவோம். அதுவே மற்றவைக்கும் பொருந்தும்.

படத்தில் காட்டியபடி, GX, GY ; $OX_1$, $OY_1$ என்ற ஒருபோகு அச்சுகள் உள்ளன.

ஒரு நுண் பகுதிப் பொருண்மை $\triangle M$, P என்ற இடத்தில் உள்ளது. ABC ஒரு தகடு.

GX, GY என்ற அச்சமைப்பில் P-ன் ஆயத் தொலைகள் $(x, y)$.

$OX_1$, $OY_1$ என்ற அச்சமைப்பில் P-ன் ஆயத் தொலைகள் $(x, y)$ ; அதே அச்சமைப்பில் G-ன் ஆயத்தொலைகள் $(\alpha, \beta)$.

$d = \beta$ என்பது வெளிப்படை.

இங்கு, $X = x + \alpha$
$Y = y + \beta$.

$OX_1$ - அச்சையொட்டி, $\triangle M$-ன் நி. நெ. தி.
$= \triangle MY^2$
$= \triangle M\ (y + \beta)^2$

எனவே $0x_1$ — அச்சை யொட்டி முழுத்தகட்டின்

$$\text{நி. நெ. தி.} = \lim_{\triangle M \to 0} \sum \triangle M (y+\beta)^2$$
$$= \lim_{\triangle M \to 0} \sum \triangle M (y^2 + 2\beta y + \beta^2)$$
$$= \lim_{\triangle M \to 0} \left[\sum \triangle M \cdot y^2 + 2\beta \sum \triangle M \cdot y + \beta^2 \sum \triangle M\right]$$
$$= \int y^2 \, dM + 2\beta \int y \, dM + \beta^2 \int dM$$

(உரிய எல்லைகளுக்குள்).

$$\int y^2 \, dM = G\text{-}x \text{ ஒட்டி, முழுத்தகட்டின் நி. நெ. தி.} = G x.$$
$$\beta^2 \int dM = M \beta^2 = M d^2.$$

இப்போது $\int y dM = 0$ என நிறுவுவோம்.

$Gx$, $Gy$ — அச்சமைப்பையொட்டி அப்பொருளின் பு. க. மையம்

$$\bar{x} = \frac{\int x \, dM}{\int dM}$$
$$\bar{y} = \frac{\int y \, dM}{\int dM} \text{ (உரிய எல்லைகளுக்குள்)}$$

ஆனல் $Gx$, $Gy$ - அச்சமைப்பில், G யே, ஆதியானபடியால்

$$\bar{x} = 0 \; ; \quad \bar{y} = 0$$
$$\therefore \int y \, dM = 0 \; .$$

ஆகவே, $ox_1$ — ஒட்டி முழுத்தக்கட்டின் நி. நெ. தி.

$$= \int y^2 dM + \beta^2 \int dM$$
$$= G_x + M \beta^2$$
$$= G_x + M d^2 \qquad (\beta = d)$$

*15.41* **இணைத்தேற்றம்:** ஒரு அச்சையொட்டி, ஒரு பொருளின் நி. நெ. தி. அவ்வச்சு, பு. க. மையத்தினூடே செல்லும் போது மீச் சிறுமதிப்பு (Minimum Value) பெறுகிறது.

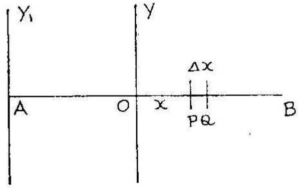
முக்கிய குறிப்பு : இத் தேற்றம் ஏதாமிரு, ஒரு போகு அச்சுகளையிணைப்பதன்று ; பு. க. மையத்தினூடே போகும் ஒரு அச்சையும், அதற்கு ஒரு போகுடைய மற்ருெரு அச்சையும் இணைப்பதாகும்.

## 15·5 சில திட்டமான பொருள்களின் நி.நெ.தி. அளவைகள் :

வேறொன்றும் கூறப்படாவிடத்து, பொருள்கள் ஒரு சீருடையனவெனவும் (homogeneous), அப்பொருள்களின் செறிவு (densits) ஒரு செறிவுடைத்தெனவும் கொள்க. ρ என்னும் குறி (ரோ) செறிவைக்குறிக்கும். I என்பது நி.நெ.தி. அளவைக்குறிக்கும். $I = Mk^2$ என்பது எப்போதும் பொருத்தமானது. I (OA) எனில் OA என்ற அச்சையொட்டிய நி.நெ.தி. அளவாம்.

எடுத்துக்காட்டுகள் :

1. ஒரு நேர்க்கம்பி நீளம் $2a$ ; பொருண்மை M. அச்சு (i) கம்பியின் மையத்தின் வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தானது (ii) கம்பியின் ஒருமுனை வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தானது. அவ்விரண்டு அச்சுக்களை யொட்டி நி.நெ.தி. காண்க.




படம்-32

(i) AB என்ற கம்பியின் நீளம் $2a$ ; மையம் 0; ஒரு முனை A ; $oy$, மையம் வழியாகக் கம்பிக்குச் செங்குத்தான அச்சு ; $AY_1$, ஒரு முனை A வழியாகக் கம்பிக்கு செங்குத்தான அச்சு.

$OP = x$ எனக் கொள்க. அங்கு $PQ = \Delta x$ அக்கம்பியின் நுண்பகுதி. செறிவு ρ எனக்கொண்டால் $M = 2a\rho$

ஒரு நுண்பகுதி PQன் பொருண்மை. $\rho \Delta x$. அப்பகுதி $oy$ லிருந்து $x$—தூரத்திலிருக்கிறது. எனவே, அப்பகுதியின் நி.நெ.தி. $oy$—ஒட்டி,

$$= \rho \, \Delta x \cdot x^2$$

∴ முழுக்கம்பியின் நி.நெ.தி. $= \underset{\Delta x \longrightarrow o}{\text{எல்லை}} \sum \rho \Delta x . x^2$

$$= \int_{-a}^{a} \rho x^2 dx$$

$$= \frac{2 \rho a^3}{3}$$

$$= \frac{2}{3} a^3 . \frac{M}{2a}$$

$$= \frac{Ma^2}{3} \ (o\,y - \text{ஒட்டி நி.நெ.தி}) \ (i)$$

(ii) $AP = x$ எனக் கொள்க.

$Ay$ — அச்சையொட்டி, $\triangle x$ P ன் நி.நெ.தி. $\triangle x \cdot P \cdot x^2$. மொத்த நி. நெ. தி. $= \lim_{\triangle x \to 0} \rho x^2 \triangle x$

$$= \rho \int_0^{2a} x^2\, dx$$

$$= \rho . \frac{8a^3}{3}$$

$$= \frac{M}{2a} . \frac{8a^3}{3}$$

$$= \frac{4\, Ma^2}{3} \ (Ay_1 - \text{ஒட்டி நி. நெ. தி}) \ (ii)$$

குறிப்பு.- ஒரு போகு அச்சுத் தேற்றத்தைக்கொண்டு $Ay_1$ — அச்சையொட்டிய நி.நெ.தி. காணலாம். $Oy$ — பு. க. மையம் வழியாகச் செல்லும் அச்சு ; $Ay_1$ — அதற்கு ஒருபோகுடைய மற்றோர் அச்சு ; இரண்டு அச்சுக்களுக்கும் இடையிலுள்ள தூரம் $= Ao = a$.

$$\therefore I_{[Ay1]} = I_{[oy]} + M \cdot a^2$$

$$= \frac{Ma^2}{3} + Ma^2$$

$$= \frac{4\, Ma^2}{3} .$$

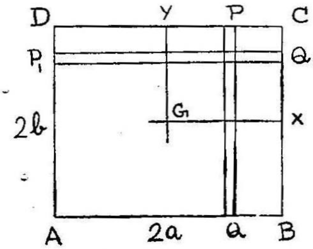
2. $2a$, $2b$ பக்கங்கள் உள்ள ஒரு நீண்ட சதுரத்தின் பொருண்மை M கீழ்க்கண்ட அச்சுக்களையொட்டி, அதின் நி. நெ. தி. காண்க :

G— அந்த நீண்ட சதுரத்தின் பு. க. மையம்.

(i) $Gx \parallel$ பக்கம் $2a$

(ii) $Gy \parallel$ பக்கம் $2b$.

(iii) Gz நீண்ட சதுர மட்டத்திற்குச் செங்குத்தானது.




படம்-33

(i) $2b$ என்ற பக்கத்திற்கு ஒருபோகுடையதாக, அந் நீண்ட சதுரத்தை P Q போன்ற நுண் பகுதிகளாகப் பிரிக்கவும். ஒவ்வொரு நுண் பகுதியும் $\triangle M$ பொருண்மையுடையது. $Gx$ — ஒட்டி, $\triangle M$ ன் நி. நெ. தி. $= \triangle M. \frac{b^2}{3}$; ஏனெனில் $Gx$, PQ ன் பு.க. மையத்தின் வழியாக, அதன் மட்டத்தில் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு அச்சு. எடுத்துக்காட்டு (15·5) 1 (i)ன்படி, அதன் நி. நெ. தி. $\triangle M \frac{b^2}{3}$.

எனவே, அம்முழு நீண்ட சதுரப்பரப்பிற்கும் $Gx$ — ஒட்டிய

$$\text{நி. நெ. தி.} = \underset{\triangle M \to o}{\text{எல்லை}} \sum \triangle M \frac{b^2}{3}$$

$$= \frac{Mb^2}{3} \qquad 2\ (i)$$

(ii) அவ்வாறே GY-ஒட்டி நி.நெ.தி. $= \frac{Ma^2}{3}$ . 2 (ii)

இங்கு $2a$ என்ற பக்கத்திற்கு ஒருபோகுடையதாக, அந் நீண்ட சதுரத்தை $P^1$ $Q^1$ போன்ற நுண் பகுதிகளாகப் பிரித்து முன் காட்டியபடி விடை பெறவும்.

(iii) செங்குத்தச்சுகள் தேற்றத்தின்படி,

$$I_{(G\,Z)} = I_{(G\,X)} + I_{(G\,Y)}$$

$$= M \cdot \frac{b^2}{3} + M \cdot \frac{a^2}{3}$$

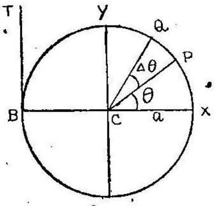
$$= M \left( \frac{a^2 + b^2}{3} \right) \qquad 2\ (iii)$$

3. ஒரு வட்டவடிவக்கம்பி ; அரைவிட்டம் $a$; பொருண்மை M ; கீழ்க்கண்ட அச்சுக்களையொட்டி, நி. நெ. தி. காண்க.

(i) ஏதாமொரு விட்டம் (அம்மட்டத்திலேயே)

(ii) ஏதாமொரு தொடுவரை (அம்மட்டத்திலேயே)

(iii) மையம் வழியாக, வட்ட மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகச் செல்லும் ஒரு அச்சு.



படம் - 34.

(iii) கண்டால், (i) - ம் (ii) - ம் உடனடியாகப் பெறலாம்.

மையம் C வழியாக, வட்டமட்டத்திற்கு (அதாவது காகித மட்டத்திற்கு) செங்குத்தாக CZ என்ற அச்சு உயர்கிறது. (படத்தில் CZ காட்டப்படவில்லை ; கற்பனை செய்து கொள்க).

PQ என்ற ஒரு நுண்பகுதி வில் நீளம் $a \triangle \theta$ (அதாவது கோணம் $QCP = \triangle \theta$ எனக்கொள்க). அந்த நுண்பகுதியின் பொருண்மை $= a \triangle \theta \rho$ அப்பகுதி CZ லிருந்து $\underline{a}$ தூரத்திலுள்ளது. அவ்வாறே, PQ போன்ற சிறு விற்பகுதிகள் யாவும் $\underline{a}$ தூரத்தில் உள்ளன.

$\therefore$ நுண்பகுதிக்குரிய நி. நெ. தி. $= a \triangle \theta \rho . a^2$

$\therefore$ முழு நி. நெ. தி. $=$ எல்லை $\underset{\triangle\theta—0}{\sum} a^3 \rho \triangle \theta.$

$$= \int_0^{2\pi} a^3 \rho \, d\theta.$$

$$= 2\pi a^3 \rho.$$

ஆனால் $M = 2 \pi a \rho$

$\therefore$ நி. நெ. தி. $= \dfrac{2 \pi a^3 . M}{2 \pi a}$

$= M a^2$ 3 (iii)

(i) அறிய, ஒன்றுக்கொன்று செங்குத்தான இரண்டு விட்டங்கள், வட்டமட்டத்தில் கொண்டால், ஒவ்வொரு விட்டத்தையொட்டிய நி. நெ. தி, $Mk^2$, $Mk^2$ ஆக இருக்கும் (சமச்சீர்த்தன்மையால்)

∴ செங்குத்தச்சுகள் தேற்றபடி,

$$MK^2 + MK^2 = Ma^2$$

$$\therefore\ MK^2 = \frac{Ma^2}{2} \qquad 3\ (i)$$

∴ வட்டமட்டத்தில் ஒருவிட்டத்தை யொட்டிய நி. நெ. தி. $= \frac{Ma^2}{2}$.

(ii) BT என்ற தொடுவரை, CY என்ற விட்டத்தோடு ஒருபோகுடையது.

$CB = a$.

CY—ஒட்டிய நி. நெ. தி. $= \frac{Ma^2}{2}$

∴ ஒருபோகு அச்சுக்கள் தேற்றப்படி,

$$I_{(BT)} = \frac{Ma^2}{2} + Ma^2 \qquad 3\ (ii)$$

$$= \frac{3Ma^2}{2}$$

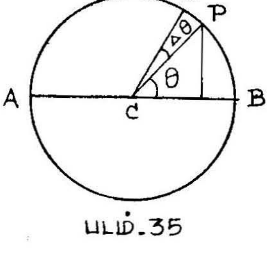
(i) ஐ நேரடியாகவும் பின்வருமுறையில் காணலாம் :

$PQ = a \triangle \theta \rho$ என்ற நுண்பகுதிப் பொருண்மை AB என்ற விட்டத்திலிருந்து $a \sin \theta$ தூரத்திலுள்ளது. எனவே AB — ஒட்டி,

அந்த நுண் பகுதியின்,

$$\text{நி. நெ. தி.} = a \triangle \theta \rho .\ a^2 \sin^2\theta$$

$$\therefore\ \text{வட்டக்கம்பியின் நி. நெ. தி.} = \sum_{\text{எல்லை } \triangle\theta \longrightarrow 0} a^3 \triangle \theta \rho \sin^2 \theta$$



படம்.35

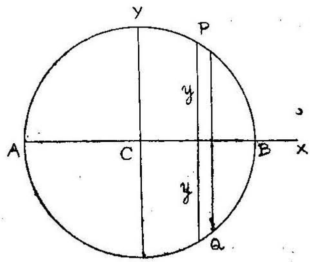
$$= \int_0^{2\pi} a^3 \rho \sin^2 \theta \, d\theta$$

$$= \frac{\pi a^3 .\ M}{\frac{2\pi a}{2}}$$

$$= \frac{Ma^2}{2}. \qquad 1\ (i)$$

(4) ஒருவட்டத் தகட்டின் அரைவிட்டம் $a$ ; பொருண்மை M; AB என்ற விட்டத்தையொட்டி, நி. நெ. தி. காண்க.

PQ என்ற இரட்டைக் குத்தாயம் $2y$ நீளம் ; $\Delta x$ அகலம் உடைய ஒரு நுண்பகுதி அங்கு எடுத்துக்கொள்க,



படம்-36

நுண்பகுதிப் பரப்பு $2y\Delta x$.

நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= 2y\Delta x\rho$

$M = \pi a^2\rho$.

PQ என்பதை ஒரு சிறு கம்பியெனக் கொண்டால், AB-ஒட்டி, அதன் நி. நெ. தி. $= 2y \Delta x \rho \cdot \frac{y^2}{3}$.

$$\therefore \text{முழு நி. நெ. தி} = \text{எல்லை}_{\Delta x \to 0} \frac{2y^3}{3} \rho\Delta x$$

$$= \frac{2}{3} \rho \int_{-a}^{a} y^3 dx$$

CX, CY அச்சமைப்பில், வட்டத்தின் சமன்பாடு $x^2 + y^2 = a^2$

$$\therefore \text{நி. நெ. தி} = \frac{2}{3} \rho \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{3} \rho \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx \quad \left[\begin{array}{l}\text{இரட்டைப் படைச்}\\ \text{சார்புத் தொகை.}\end{array}\right]$$

$x = a \sin\theta$ என ஈடு செய்ய,

$$\text{நி. நெ. தி.} = \frac{4}{3} \rho\, a^4 \int_{0}^{\pi/2} \cos^4\theta\, d\theta$$

$$= \frac{4}{3} \cdot \frac{M}{\pi a^2} a^4 \cdot \frac{3\cdot 1}{4\cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{M a^2}{4}. \qquad (4)$$

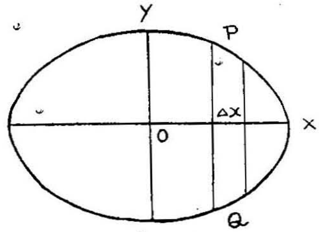
சமச்சீர்த்தன்மையில், CY – ஒட்டி நி. நெ. தி. $\frac{M a^2}{4}$ ஆகும்.

எனவே C வழியாக வட்டமட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக ஒரு அச்சு, CZ என உயர்த்தினுல், CZ ஐ யொட்டி,

$$\text{வட்டத் தகட்டின் நி. நெ. தி} = \frac{M a^2}{4} + \frac{M a^2}{4}$$

$$= \frac{M a^2}{2}$$

5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற சமன்பாடுடைய ஒரு நீள் வட்டத் தகடு உள்ளது; அதன் பொருண்மை M. ஆய அச்சுக்களையொட்டி, அத்தகட்டின் நி. நெ. தி. காண்க.



படம்-37

PQ என்ற இரட்டைக் குத்தாயம் $2y$; $\triangle x$ அகலமுள்ள ஒரு நுண் பகுதி அங்கு எடுத்துக்கொள்க.

நுண்பகுதிப்பரப்பு $= 2y \triangle x$

நுண்பகுதிப் பொருண்மை

$$= 2y \triangle x \rho$$

$$M = \pi ab \rho.$$

(4)-ல் கண்டபடி, OX - ஒட்டி, அந்த நுண்பகுதியின்

$$\text{நி. நெ. தி.} = \underset{\triangle x \to 0}{\text{எல்லை}} \sum \frac{2y^3}{3} \triangle x \rho.$$

$$= \int_{-a}^{a} \frac{2y^3}{3} \rho \, dx .$$

இங்கு $y^3 = \frac{b^3}{a^3}(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}$

$$\therefore \text{OX - ஒட்டி நி. நெ. தி} = \frac{2}{3} \rho \frac{b^3}{a^3} \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$$= \frac{4}{3} \rho \frac{b^3}{a^3} \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}} dx$$

$x = a \sin\theta$ என ஈடு செய்ய,

$$\text{நி. நெ. தி.} = \frac{4}{3}\rho\frac{b^3}{a^3}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a^4 \cos^4\theta\, d\,\theta$$

$$= \frac{4}{3}\cdot\frac{M}{\pi ab}\cdot b^3 a\cdot\frac{3\cdot 1}{4\cdot 2}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{Mb^2}{4} \qquad (5)$$

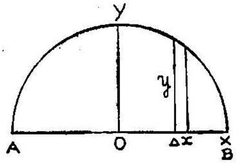
அவ்வாறே OY - ஒட்டி நி. நெ. தி. $= \frac{M\,a^2}{4}$

மேலும், OZ என ஒரு அச்சு, O வழியாக, நீள் வட்டமட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக உயருமானல்,

$$\text{OZ - ஒட்டி நி. நெ. தி.} = M\left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right).$$

**உருளைப்பருவங்கள் :**

6. ஒரு கோளத்தின் அரைவிட்டம் $a$; பொருண்மை M. அதன் ஏதாமொரு விட்டத்தையொட்டி, நி. நெ. தி. காண்க.



படம் - 38

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற அரைவட்டம், X அச்சை ஒரு சுற்று சுற்றினல் ஒரு கோளம், ($a$ அரை விட்டமுடையது) பெறப்படும்.

இதில் ஒரு நுண்பகுதிப் பருமம் $= \pi y^2 \triangle x$. நுண்பகுதிப் பொருண்மை $= \pi y^2 \triangle x\rho$.

$$M = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho.$$

இந்த நுண் பகுதி $y$ அரை விட்டம், $\triangle x$ மொத்தமுள்ள ஒரு மெல்லிய வட்டத்தகடு. AB என்ற விட்டம், அம் மெல்லிய வட்டத்தகட்டின் மையம் வழியாக, அவ் வட்ட மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும் ஒரு அச்சு. எனவே, அந்த நுண்பகுதிப் பொருண்மைக்கு,

$$\text{AB - ஒட்டி நி. நெ. தி} = \pi y^2 \triangle x \rho \times \frac{y^2}{2}$$

[வட்டத்தகடு நி. நெ. தி. (4)]

$$\therefore \text{ முழு நி. நெ. தி.} = \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum \frac{\pi y^4}{2} \rho \triangle x.$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho \int_{-a}^{a} y^4 \, dx.$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)^2 \, dx.$$

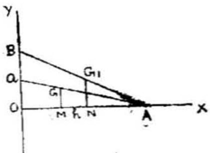
$$= \pi \rho \int_{0}^{a} (a^4 - 2a^2 x^2 + x^4) \, dx$$

$$= \pi \rho \cdot \frac{8}{15} a^5$$

$$= \frac{\pi \cdot M}{\frac{4}{3} \pi a^3} \cdot \frac{8}{15} a^5$$

$$= \frac{2 M a^2}{5} \qquad (6)$$

**7.** ஒரு வட்டக்கூம்பு; அடிமட்ட அரை விட்டம் $a$; உயரம் $h$; பொருண்மை $m$. அதன் அச்சையொட்டிய நி. நெ. தி. காண்க.




படம்-46

படத்தில் காட்டப்பட்ட OAB என்ற நேர்க் கோண முக்கோணம், OX-அச்சை ஒருமுறை சுற்றினுல், நாம் வேண்டும் கூம்பு கிடைக்கும்.

அக் கூம்பின் அச்சு O A. சென்ற பத்தியில் காட்டியபடி, ஒரு நுண் பகுதிப் பொருண்மை $= \pi y^2 \triangle x \rho \; M = \frac{1}{3} \pi a^2 h \rho$.

இந் நுண் பகுதி, ஒரு மெல்லிய வட்டத்தகடு; அதன் அரைவிட்டம் $y$; மொத்தம் $\triangle x$. O A-அச்சு அவ்வட்டத்தின் மையம் வழியாக, அவ்வட்ட மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும் அச்சாகும்.

எனவே, அந் நுண்பகுதிப் பொருண்மைக்கு, OA – ஒட்டிய நி. நெ. தி. $= \pi y^2 \triangle x \rho . \frac{y^2}{2}$

$$\text{முழு நி. நெ. தி.} = \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum \frac{\pi y^4}{2} \rho \triangle x$$

$$= \int_0^h \frac{\pi y^4}{2} \rho \, dx$$

$$= \frac{\pi}{2} \rho \int_0^h y^4 \, dx.$$

இங்கு AB என்ற கோட்டின் சமன்பாடு

$$\frac{x}{h} + \frac{y}{a} = 1$$

$$\therefore y = \frac{a}{h}\left(h - x\right)$$

$$\therefore \text{நி. நெ. தி.} = \frac{\pi}{2} \rho \int_0^h \frac{a^4}{h^4} (h - x)^4 \, dx$$

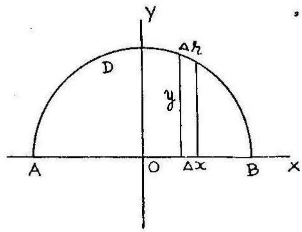
$$= \frac{\pi}{2} \rho . \frac{a^4}{h^4} . \frac{h^5}{5}$$

$$= \frac{\pi}{2} . \frac{M}{\frac{1}{3} \pi a^2 h} . \frac{a^4 h}{5}$$

$$= \frac{3}{10} M a^2.$$

### 8. உருளைப் புறப் பரப்புக்கள்

ஒரு புரைக்கோளம் (hollow sphere); அரைவிட்டம் $a$; பொருண்மை M. அதன் ஏதாமொரு விட்டத்தை யொட்டிய நி. நெ. தி. காண்க.




படம் 40

$x^2 + y^2 = a^2$ என்ற அரை வட்டவில் ADBOA, AB-ஐ ஒரு சுற்று சுற்றினால், ஒரு புரைக்கோளப் புறப்பரப்பு கிடைக்கும்.

புறப்பரப்பு $= 4 \pi a^2$

பொருண்மை M $= 4 \pi a^2 \rho$

ஒரு நுண் பகுதிப் புறப்பரப்பு $= 2 \pi y \triangle s$

அதன் பொருண்மை $= 2 \pi y \triangle s \rho.$

இது ஒரு மெல்லிய வட்டக் கம்பியாக விருக்கும். அதன் அரைவிட்டம் $y$.

அக் கம்பியின் மையம் வழியாக, அதன் மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாகவிருக்கும் அச்சு AB ஆகும்.

எனவே AB — ஒட்டி, அதன் நி. நெ. தி.

$$= 2\pi y \triangle s\, \rho .\, y^2 \qquad 3 \text{ (iii)}$$

$$= 2\pi y^3 \rho \triangle s = 2\pi y^3 \rho \frac{\triangle s}{\triangle x} . \triangle x$$

முழு நி. நெ. தி. $= \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \sum 2\pi y^3 \rho \dfrac{\triangle s}{\triangle x} \triangle x$

$$= \int_{-a}^{a} 2\pi y^3 \rho \frac{ds}{dx} dx$$

$$= 2\pi \rho \int_{-a}^{a} y^3 . \frac{ds}{dx} dx .$$

இங்கு $\dfrac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$

$$= \sqrt{1 + \frac{x^2}{y^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{y^2 + x^2}{y^2}}$$

$$= \frac{a}{y}$$

∴ நி. நெ. தி. $= 2\pi \rho \displaystyle\int_{-a}^{a} y^3 . \frac{a}{y}\, dx$

$$= 2\pi a \rho \int_{-a}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$

$$= 4\pi a \rho \int_{0}^{a} (a^2 - x^2)\, dx$$

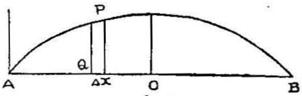
$$= 4\pi a \rho . \frac{2a^3}{3}$$

$$= \frac{8\pi a^4}{3} . \frac{M}{4\pi a^2}$$

$$= \tfrac{2}{3} M a^2 \qquad (8)$$

மற்றும் சில எடுத்துக்காட்டுகள்:

9. $x = a\ (\theta - \sin\theta)$ ; $y = a\ (1 - \cos\theta)$ என்றவளை வரையின் ஒரு வில்லால் எல்லைப் பட்ட பரப்புக்கு, அதன் அடிக் கோட்டையொட்டி, நி. நெ. தி. காண்க.



படம் - 41

இதன் அமைப்பும் பரப்பும் நாம் முன்னர் பார்த்தோம். *[பயிற்சிகள் : 9 (8)].*

பரப்பு $= 3\pi a^2$ ; $M = 3\pi a^2 \rho$

$\theta$ ன் எல்லைகள் 0 முதல் $2\pi$ வரை.

P Q என்ற நுண் பகுதிப் பொருண்மை,

$$= y \triangle x \rho$$

இங்கு P Q ஒரு மெல்லிய கம்பி ; அதன் நீளம் ; A, B என்ற அடிக்கோடு, P Q ன் ஒரு முனையில் P Q க்குச் செங்குத் தாக உள்ளது.

எனவே A B — ஒட்டி அதன் நி. நெ. தி.

$$= y \triangle x \rho \ \frac{y^2}{3} \qquad (1)$$

மொத்த நி. நெ. தி. $= \underset{\triangle x \longrightarrow 0}{\text{எல்லை}} \Sigma \frac{y^3}{3} \rho \triangle x$

$$\int \frac{y^3}{3} \rho\, dx$$

$$= \tfrac{1}{3} \rho \int y^3 \ \frac{dx}{d\theta} d\theta$$

$$= \tfrac{1}{3} \rho \int_0^{2\pi} a^3 (1-\cos\theta)^3\, a\, (1-\cos\theta)\ d\theta,$$

$$= \frac{1}{3} \rho a^4 \int_0^{2\pi} 16 \cos^8 \frac{\theta}{2}\ d\theta$$

$\frac{\theta}{2} = \phi$ எனக் கொண்டால், $\phi$ ன் எல்லைகள் 0 முதல் $\pi$ வரையாக மாறும்.

$$\therefore \text{நி. நெ. தி.} = \frac{16}{3}\rho a^4 \int_0^{\pi} 2\cos^8\phi\, d\phi$$

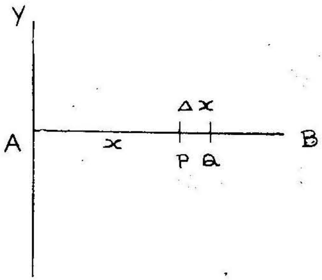
$$= \frac{32\rho a^4}{3} \times 2\int_0^{\pi/2} \cos^8\phi\, d\phi$$

$$= \frac{64\rho a^4}{3} \cdot \frac{7\cdot5\cdot3\cdot1}{8\cdot4\cdot6\cdot2} \cdot \frac{\pi}{2}$$

$$= \frac{35}{12}\pi a^4 \cdot \frac{M}{3\pi a^2}$$

$$= \frac{35}{36} Ma^2 \qquad (9)$$

**10.** ஒரு மெல்லிய கம்பியின் நீளம் 2 ; அதன் செறிவு ஒரு முனையிலிருந்து உள்ள தூரத்திற்குத் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அந்த முனையில் கம்பிக்குச் செங்குத்தாக உள்ள ஒரு அச்சை யொட்டி, அதன் நி. நெ. தி. காண்க.



படம். 42

A விருந்து $x$ — தூரத்திலுள்ள $PQ = \triangle x$ என்ற ஒரு நுண் பகுதி நீளம் எடுத்துக்கொள்க.

அதன் பொருண்மை—

$$= kx\triangle x.$$

$\therefore$ AY— ஒட்டி அதன் நி. நெ. தி. $= kx^3 \triangle x$.

$$\text{எனவே முழு நி. நெ. தி} = \text{எல்லை}_{\triangle x\to 0} \sum K x^3 \triangle x$$

$$= k\int_0^{2a} x^3\, dx$$

$$= 4\,k\,a^4$$

$$\text{அதன் பொருண்மை } M = \text{எல்லை}_{\triangle x\to 0} \sum k\, x \triangle x$$

$$= k\int_0^{2a} x\, d\,x$$

$$= 2\,k\,a^2$$

$\therefore$ அதன் நி. நெ. தி. $= 2\,k\,a^2 \cdot 2\,a^2$

$$= 2\,M\,a^2$$

## பயிற்சிகள் 15

வேறொன்றுங்கூறப்படாவிடத்து, பொருள்கள் சமச்செறிவுடையனவெனவும், பொருண்மை M எனவும் கொள்க,

1. $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ என்ற நீள்வட்டப்பரப்பு, நெட்டச்சைச் சுற்றிவரும் போது ஏற்படும் பருமம். இதற்கு நெட்டச்சை யொட்டி நி. நெ. தி. காண்க.

2. $y^2 = 4\,ax$ என்ற பரப்பு $x = 0$ முதல் $x = h$ வரை. இப் பரப்பு $x$ அச்சைச் சுற்றிவரும்போது ஏற்படும் பருமம். இதற்கு $x$—அச்சையொட்டி நி. நெ. தி. காண்க.

3. $a$ அரைவிட்டமுள்ள ஒரு வட்டக்கம்பி. பின்வரும் அச்சுக்களையொட்டி நி. நெ. தி. காண்க.

(1) அதன் மட்டத்திலுள்ள ஏதாமொரு தொடுவரை;

(2) அதன் மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக உயரும் தொடு வரை.

4. ஒரு புரைவட்ட உருட்டி (hollow cylinder); உள், வெளி அறைவிட்டங்கள் $r$, R; அதன் அச்சையொட்டி நி.நெ.தி. காண்க.

5. சமகோண முக்கோணம். அதன் ஒரு பக்கத்தை யொட்டி நி. நெ. தி. காண்க.

6. ஒரு கூம்புப் பருமம்; மட்ட அரை விட்டம் $a$; உயரம் $h$; பொருண்மை M. அதன் அச்சுக்கு செங்குத்தாத உச்சியின் வழியாகச் செல்லும் ஒரு கோட்டையொட்டி, நி.நெ.தி. $\dfrac{3\,M}{5}\left(h^2 + \dfrac{a^2}{4}\right)$ என நிறுவுக.

7. $r = a\,(1 + \cos\theta)$ என்ற நெஞ்சுவளைத்தகடு ; முதற் புள்ளி (Pole) வழியாக அதன் மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக உயரும் அச்சையொட்டி, அதன் நி.நெ.தி. $\dfrac{35\,Ma^2}{24}$ என நிறுவுக.

8. ஒரு அரைக் கோளப் பருமம்; பொருண்மை M; அரை விட்டம் $a$; செறிவு அடி வட்ட மட்டத்திலிருந்துள்ள தூரத்திற்குத் தகவுப் பொருத்தமுடையது. அதன் சமச்சீர் அச்சையொட்டி, நி.நெ.தி. $\frac{Ma^2}{3}$ என நிறுவுக.

9. ஒரு சதுரம், பக்கம் $a$; பொருண்மை M. கீழ்க் கண்ட அச்சுக்களையொட்டி நி.நெ.தி. காண்க:

(1) ஒரு முனையிலிருந்து சதுர மட்டத்திற்குச் செங் குத்தாக உயரும் அச்சு;

(2) ஒரு குறுக்குக் கோடு.

10. ஒரு-மைய வட்டங்கள், $a$, $b$ என்ற அரைவிட்ட முடையன ($a > b$). அவைகளுக்கிடைப்பட்ட வளையப்பரப்பு. கீழ்க்கண்ட அச்சுக்களையொட்டி, நி.நெ.தி. காண்க:

(i) ஒரு விட்டம்.

(ii) வளைய மட்டத்திற்குச் செங்குத்தாக, மையத்தி னின்று உயரும் அச்சு;

பகுதி 16

# பாப்பசுத் தேற்றங்கள்

## [Pappus, Theorems]

*16·1* இவை ஒரு மட்டத்திலுள்ள வளைவரைகளுக்குப் பொருந்துவன. வேறு கூறப்படாவிடத்து, குறிப்பிட்ட வளை வரைகள் ஒரே மட்டத்திலுள்ளவையெனக் கொள்க.

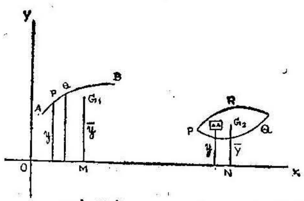
**16.2 பாப்பசுத் தேற்றங்கள்.**

1. ஒரு வில் (arc) அதை வெட்டாத ஒரு அச்சைச் சுற்றினல் ஏற்படும் புறப்பரப்பு, வில் நீளத்தை, அவ்வில்லின் பு.க. மையம் சுற்றி வரும் தூரத்தால் பெருக்கக் கிடைக்கும்.

2. ஒரு பரப்பு, அதை வெட்டாத ஒரு அச்சைச் சுற்றினல் ஏற்படும் பருமம், பரப்பின் அளவை, அப்பரப்பின் பு.க. மையம் சுற்றிவரும் தூரத்தால் பெருக்கக் கிடைக்கும்.

**படம் (i) தேற்றம் ஒன்றுக்குரியது.**

*ox, oy* — அச்சுக்கள்; A B என்ற வில்லின் நீளம் *i*. அவ்வில்லின் பு. க. மையம் $G_1$; $G_1 M = \bar{y}$ ; அவ்வில் *ox*-ஐ, $\theta$ என்ற கோண அளவு சுற்றுகிறது. முதல் தேற்றம் கூறுவது : ஏற்படும் புறப்பரப்பு $S = l \bar{y} \theta$.




படம்-43(i) படம்-43(ii)

**படம் (ii) தேற்றம் இரண்டிற்குரியது.**

P Q R என்ற பரப்பளவு A ; அப்பரப்பின் பு.க. மையம் $G_2$ ; $G_2 N = \bar{y}$ ; அப்பரப்பு *ox*-ஐ, $\theta$ என்ற கோண அளவு சுற்றுகிறது. இரண்டாவது தேற்றம் கூறுவது : ஏற்படும் பருமம் $V = A \bar{y} \theta$.

இவ்விரண்டிலும் $\theta = 2\pi$ ஆனல், ஒரு முழுச் சுற்று எனவும் $\theta = \pi$ ஆனல், ஒரு அரைச் சுற்று எனவும் பொருளாகும்.

இவ்விரண்டு தேற்றங்களையும் இப்போது நிறுவலாம்.

**தேற்றம் 1 : தெரிப்பு :**

படம் (i) : ஒரு நுண் பகுதி நீளம் $\triangle s = PQ$ எனக் கொள்க. Pன் $y$ — ஆயத்தொலை $y$. இந்நுண் பகுதி நீளம், $\theta$ கோண அளவு சுற்றினல் ஏற்படும் புறப்பரப்பு $= y\,\theta \triangle s$.

$$\text{எனவே மொத்தப் பரப்பு} = \sum y\,\theta \triangle s$$
$$= \theta \sum y \triangle s$$
$$= \theta \int y\,ds \text{ (உரிய எல்லைகள்)}$$

ABன் நீளம் $l$ ஆனல்,

$$\bar{y} = \frac{\int y\,ds}{l} \text{ (அதே எல்லைகள்)}$$

$\therefore$ மொத்தப் புறப்பரப்பு $= \theta\, l\, \bar{y}$ (1)

ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினல் $\theta = 2\pi$ ஆகும்.

அப்போது மொத்தப் புறப்பரப்பு $= 2\pi\, l\, \bar{y}$ (2)

*(2) தேற்றம் 2 : தெரிப்பு ;*

படம் (ii) PQR ஒரு பரப்பு.

அதன் பு.க. மையம் $G_2\ (\bar{x}, \bar{y})$ எனக்கொள்வோம்.

$\triangle A$ அப்பரப்பின் ஒரு நுண் பகுதி ; $ox$ லிருந்து $y$-ஆயத் தொலை தூரத்தில் உள்ளது. இந்த நுண்பகுதி, $\theta$ கோண அளவு, $ox$ஐச் சுற்றினல் ஏற்படும் பருமம் $= y\,\theta \triangle A$.

$$\text{எனவே மொத்தப் பருமம்} = \sum y\,\theta \triangle A$$
$$= \theta \sum y \triangle A.$$
$$= \theta \int y\,dA$$
(உரிய எல்லைகள்)

PQR-ன் பரப்பளவு A ஆனல்,

$$\bar{y} = \frac{\int y\,dA}{A} \text{ (அதே எல்லைகள்)}$$

$\therefore$ மொத்தப் பருமம் $= \theta\, A\, \bar{y}$ (3)

ஒரு முழுச் சுற்றுக்கு $\theta = 2\pi$ ஆகும்.

அப்போது மொத்தப் பருமம் $= 2\pi\, A\, \bar{y}$ (4)

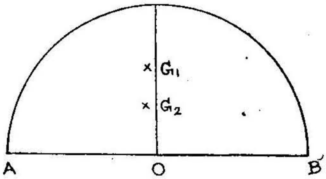
16·3 பாப்பசுத் தேற்றங்கள் பயன்படும் இடங்கள் :

ஒரு அரை வட்டம் (அரை விட்டம் $a$) தன் எல்லை விட்டத்தை அரைச் சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருவே ஒரு அரைக் கோளம். அதாவது $\theta = \pi$.

அரைக் கோளத்தின் பருமம் $= \frac{2}{3}\pi a^3$

அரைக் கோளத்தின் புறப் பரப்பு $= 2\pi a^2$

அரை வட்ட வில்லின் நீளம் $= \pi a$




படம்-44

அவ்வரை வட்டக் கம்பியின் பு.க. மையம் $G^1$ என்ற இடத்தில் இருக்கிறது எனக் கொள்வோம்.

இவ் வில் $\theta = \pi$ கோண அளவு AB-ஐ அரைச் சுற்று சுற்றினால் வரும் புறப்பரப்பு $= 2\pi a^2$.

பாப்பசுத் தேற்றம் (1)-ன்படி $2\pi a^2 = \pi a \cdot \pi \cdot OG_1$

$$\therefore OG_1 = \frac{2\pi a^2}{\pi^2 a}$$

$$= \frac{2a}{\pi}$$

எனவே அரை வட்டக் கம்பியின் பு.க. மையம் $G_1$ என்பது $OG_1 = \frac{2a}{\pi}$ என்ற வாய்பாடாகப் பெறப்படுகிறது.

இரண்டாவதாக, அவ்வரை வட்டத்தின் பரப்பு, $\frac{\pi a^2}{2}$. அவ்வரை வட்டப் பரப்பின் பு. க. மையம், $G_2$ என்ற இடத்திலிருக்கிறது எனக் கொள்வோம்.

இப் பரப்பு $\theta = \pi$ கோண அளவு AB-ஐ அரைச் சுற்று சுற்றினால் வரும் பருமம் $= \frac{2}{3}\pi a^3$

பாப்பசுத் தேற்றம் (2)-ன்படி,

$$\tfrac{2}{3}\pi a^3 = \frac{\pi a^2}{2} \cdot \pi \cdot OG_2$$

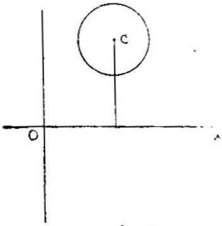
$$\therefore OG_2 = \frac{2\pi a^3}{3} \cdot \frac{2}{\pi^2 a^2}$$

$$= \frac{4a}{3\pi}$$

எனவே அரை வட்டத்தகட்டின் (பரப்பின்) புவிக் கவர்ச்சி மையம் $G_2$ என்பது $OG_2 = \frac{4a}{3\pi}$ என்ற வாய்பாடாகப் பெறப்படுகிறது.

**16·4 எடுத்துக்காட்டு :**

(1) ஒரு நங்கூர வளையத்தின் பருமத்தையும் புறப் பரப்பையும் காண்க.



படம். 45

C என்ற மையம் பெற்ற ஒரு வட்டத்தின் அரை விட்டம் $a$. அவ் வட்டத்தை வெட்டாமல் C-யிலிருந்து $r$ தூரமுள்ள $ox$-என்ற அச்சை அவ் வட்டம் ஒரு முழுச்சுற்று சுற்றினால் ஏற்படும் உருவமே நங்கூர வளையக மெனப்படும்.

(i) வட்டத்தின் நீளம் $= 2\pi a$

அதன் பு.க: மையம் C

இந்த நீளம் (கம்பி வட்டம்) $ox$-ஐ ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றும்போது C சுற்றும் தூரம் $2\pi r$ ஆகும.

எனவே நங்கூர வளையத்தின் புறப்பரப்பு

$$= 2\pi a \times 2\pi r$$
$$= 4\pi^2 ar$$

(ii) வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi a^2$.

அதன் பு.க: மையம் C.

இப்பரப்பு $ox$-ஐ ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றும் போது C சுற்றும் தூரம் $2\pi r$ ஆகும்.

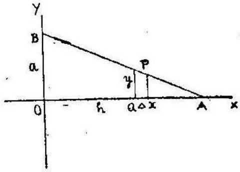
$\therefore$ ந. வளையத்தின் பருமம் $= \pi a^2 \times 2\pi r$

$$= 2\pi^2 a^2 r.$$

**எடுத்துக்காட்டு :**

ஒரு வட்டக் கூம்பின் அடி மட்ட அரை விட்டம் நேர் உயரம் $h$. அதன் பருமம், புறப்பரப்பு காண்க.

படத்தில் காட்டப்பட்ட OAB என்ற முக்கோணம் $ox$-ஐ ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினால், நாம் வேண்டிய கூம்பு கிடைக்கும்.




படம். 39

(i) பருமம் ;

முக்கோணப் பரப்பு $= \frac{1}{2} ah$

பரப்பின் பு..க. மையம் G.

$$GM = \frac{a}{3}$$ என எளிதில் அறியலாம்.

எனவே பருமம் $= \frac{1}{2}\, ah \times 2\pi\, \frac{a}{3}$

$$= \frac{\pi a^2 h}{3} \qquad (1)$$

(ii) புறப்பரப்பு :

A B என்ற கோட்டின் நீளம் $\sqrt{a^2 + h^2}$

அக்கோட்டின் பு.க. மையம் $G_1$

$$G_1 N_2 = \frac{a}{2}$$ என எளிதில் அறியலாம்.

எனவே புறப்பரப்பு $= \sqrt{a^2 + h^2}\ \frac{a}{2}$

$$= \pi a \sqrt{a^2 + h^2}$$

$$= \pi a \times \text{சாய்வு நீளம்.} \qquad (2)$$

## பயிற்சிகள் 16

### பாப்பசுத் தேற்றங்கள்

1. பாப்பசுத் தேற்றம் கொண்டு ஒரு வட்ட உருட்டின் பருமத்தையும், புறப்பரப்பையும் காண்க.

2. S பரப்புடைய ஒரு முக்கோணம், அதே மட்டத்தில், முக்கோணத்தை வெட்டாத ஒரு அச்சைச் சுற்றி வருகிறது. முக்கோணத்தின் முனைகள், அச்சிலிருந்து, $\alpha, \beta, r$ தூரத்திலுள்ளன. பெறப்படும் உருளைப் பருமம் $\frac{2\pi S(\alpha+\beta+r)}{3}$ என நிறுவுக.

3. ஒரு வட்டம் (அரை விட்டம் $a$) ஒரு தொடு வரையை அச்சாகக் கொண்டு சுற்றி வரும் உருளையின் பருமம் $\pi a^3$ என நிறுவுக.

4. $x = a(\theta - \sin\theta)$ ; $y = a(1 - \cos\theta)$-ன் ஒரு முழு வில், தன் நிலை மட்டத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது. அவ்வுருளையின் புறப்பரப்பு $\frac{18}{3}\pi a^2$ என நிறுவுக.

5. $2ay^2 = x(x-a)^2$ என்ற வளையப்பரப்பு, $y = a$ என்ற அச்சைச் சுற்றுகிறது. அவ்வுருளையின் பருமம் $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi a^3$ என நிறுவுக.

பகுதி 17

# வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

## (Differential Equations)

*17·1* மாறு ராசிகளையும், அவைகளின் வகை நுண் கெழுக்களையும் இணைக்கும் சமன்பாடுகளே வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் எனப்படும்.

வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் இரு வகைப்படும் :

(1) சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் ;

(2) பகுப்பு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்.

சாதாரண வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் ஒரே ஒரு சார்பில் மாறிதான் இருக்கும்.

பகுப்பு வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளில் ஒன்றுக்கு மேற்பட்ட சார்பில் மாறிகள் இருக்கும்.

**17·2 வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் வரிசையும் படியும்**

ஒரு சமன்பாட்டில் தோன்றும் வகை நுண் கெழுவின் மிக உயர்ந்த வரிசையே அச்சமன்பாட்டின் வரிசையெனப் படும். அம்மிக உயர்ந்த வரிசையின் படியே, அச்சமன் பாட்டின் படியெனப்படும்.

$$\left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)^4 + 4\,\frac{d^2y}{dx^2} + y = o$$

என்ற சமன்பாட்டின் வரிசை **மூன்று**, படி **நான்கு**.

எடுத்துக்காட்டாக பின்வரும் பல்வேறு சமன்பாடுகளின் வரிசைகளையும் படிகளையும் காண்போம் :—

$$\frac{dy}{dx} = \sin^2 x$$ : முதன் வரிசை, முதற்படி.

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P\frac{dy}{dx} + Qy = 0$$ : இரண்டாம் வரிசை, முதற்படி.

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 + ay^3 = 0$$ : முதல் வரிசை, மூன்றும் படி.

$$\frac{d^ny}{dx^n} + Py = Q$$ : $n$-ம் வரிசை முதற்படி.

$$y - x\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$ : முதல் வரிசை, நான்காம் படி.

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$ : இரண்டாம் வரிசை, இரண்டாம் படி.

$$x\frac{\partial u}{\partial x}\ y + \frac{\partial u}{\partial y} = u$$ : முதல் வரிசை, முதற் படி, பகுப்பு வகைக் கெழுச் சமன்பாடு.

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y\ \partial x\ \partial z} = x^3 u$$ : மூன்றும் வரிசை, முதற்படி, பகுப்பு வகைக் கெழுச் சமன்பாடு.

$\frac{d^ny}{dx^n} + P_1\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots P_n y = \times$ என்ற சமன்பாட்டில், $P_1$, $P_2, \ldots\ldots P_n$, $\times$, யாவும் $x$-ன் சார்புகள். இதுவே, $n$-ம் வரிசை, முதற்படியுள்ள பொதுவான சமன்பாட்டு அமைப்பாகும்.

### 17·3 வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள் அமைப்பது.

$f(x, y, c_1, c_2, c_3, \ldots\ldots c_n) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின், $c_1$, $c_2, \ldots c_n$ என்பவை $n$ பொது மாறிலிகள். இப்போது மாறிலிகளுக்கு வெவ்வேறு மதிப்புக்கள் கொடுக்கும்போது ஒரு வளைவரைக் குடும்பம் ஏற்படுகின்றது.

எடுத்துக்காட்டாக :

$y^2 = 4\,ax$ என்ற சமன்பாட்டில், $a = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \ -1, \ -2$ என்ற வெவ்வேறு மதிப்புக்கள் கொள்ளும்போது,

$$y^2 = x$$
$$y^2 = 2x$$
$$y^2 = 4x$$
$$y^2 = 8x$$
$$y^2 = -4x$$
$$y^2 = -8x$$

போன்று ஒரு பரவளையக் குடும்பம் ஏற்படுகின்றது. இவ் வளைவரைக் குடும்பத்திற்குப் பொதுவாக உள்ள

$$y^2 = 4ax$$

என்ற சமன்பாட்டிலிருந்து, அக்குடும்பத்தின் வடிவத் தன்மை புலப்படுவதில்லை. ஆனால்

$$y^2 = 4ax$$

என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள மாறிலியை நீக்கினால், வடிவத் தன்மை புலப்படும்.

$y^2 = 4ax$-ன் முதல் வரிசை வகைநுண்கெழுகாண,

$$2y\ \frac{dy}{dx} = 4a$$

$\therefore$ $4a$-க்குப் பதிலாக $2y\frac{dy}{dx}$ என்பதை ஈடு செய்தால்,

$$y^2 = 2y\frac{dy}{dx}\,.\,x$$

$\therefore$ $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x}$ என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

இச் சமன்பாட்டிலிருந்து நாம் அறிவது யாதெனில் :

இக்குடும்பத்திலுள்ள வளைவரைகளுக்கு எந்த இடத்திலும், கிழிக்கப்படுகிற தொடுவரையின் சாய்வு $= \frac{y}{2x}$.

அதாவது சாய்வு $= \dfrac{\text{அப்புள்ளியின் } y \text{ ஆயத் தொலை}}{2 \text{ மடங்கு அதன் } x \text{ ஆயத்தொலை}}$ இதுவே $y^2 = 4ax$ என்ற பரவளையக் குடும்பத்தின் வடிவத்தன்மையாகும்.

இவ்வாறே,

$f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$ என்ற சமன்பாட்டிலுள்ள $c_1, c_2, \ldots c_n$ என்ற மாறிலிகளை நீக்கிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கண்டால், அக்குடும்பத்தின் வடிவத் தன்மைகள் புலப்படும்.

எப்படி $c_1, c_2, \ldots c_n$ என்பவைகளை நீக்குவது ?

அச்சமன்பாட்டைக் கொண்டு, $n$ முறை வகை நுண்கெழுகாண, அதாவது, $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}, \ldots \dfrac{d^ny}{dx^n}$ காண நமக்கு $n$ வெவ்வேறு சமன்பாடுகள் கிடைக்கும். அவைகளில், முறையே, $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2} \ldots \dfrac{d^ny}{dx^n}$ என்ற வகை நுண்கெழுக்கள் இருக்கும். இப்போது,

$f(x, y, c_1, c_2, \ldots c_n) = 0$ என்ற சமன்பாட்டோடு, அந்த $n$ சமன்பாடுகளையும் கொண்டு (மொத்தம் $n+1$ சமன்பாடுகள்) $c_1, c_2, \ldots c_n$ என்ற மாறிலிகளை நீக்கி,

$$F\left(\frac{d^ny}{dx^n}, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} \ldots \frac{d^2y}{dx^2}, \frac{dy}{dx}, x, y\right) = 0$$

என்ற சமன்பாட்டைக் கண்டறியலாம். இம்முறையே, வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைக்கும் முறையாகும். இவ்வகையில், நாம் அவ்வளைவரைக் குடும்பத்தின், பொதுவான வடிவத்தன்மைகளையறியலாம்.

17·311 எடுத்துக்காட்டு (1)

$y = mx + c$ என்பது, $m$, $c$-ன் மதிப்பையொட்டிய ஒரு நேர்க்கோட்டுக் குடும்பம்

$$\text{இங்கு } \frac{dy}{dx} = m$$

எனவே, $c$ என்னவானாலும், $m$ என்ற ஒரு குறிப்பிட்ட மதிப்புக்கு, இது ஒரு, ஒருபோகு (Parallel) நேர்க் கோட்டுக் குடும்பம்.

மேலும் $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

எனவே இக்குடும்பத்திற்கு வளைவு (Curvature) இல்லையென அறிகிறோம்.

$$\text{ஏனெனில் வளைவு} = \frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

ஆக, $y = mx + c$ ன்

வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, $\frac{d^2 y}{dx^2} = 0$.

அதனால், இக்குடும்பத்திற்கு வளைவு என்பதே இல்லை.

எடுத்துக்காட்டு (2).

$x^2 + y^2 = a^2$ என்பது, $a$ ன் மதிப்பை யொட்டிய, ஒரு, ஒரு-மைய வட்டக் குடும்பம்.

$$\text{இங்கு } x + y \frac{dy}{dx} = 0.$$

இதுவே $x^2 + y^2 = a^2$ க்கு உரிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடு.

வடிவத்தன்மை, $\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$ என்பதைக் கொண்டு அறியலாம்.

இக்குடும்பத்திலுள்ள ஒவ்வொரு வளைவரைக்கும், எந்த இடத்தில் ஒரு தொடுவரை கிழித்தாலும் அதன் சாய்வு $= \frac{-x}{y}$ ; அதாவது சாய்வு $= -$ $\frac{\text{அப்புள்ளியின் } x \text{ ஆயத்தொலை}}{\text{அப்புள்ளியின் } y \text{ ஆயத்தொலை}}$

மேலும், அப்புள்ளியை மையத்தோடு சேர்க்கும் கோடாகிய, ஆரையும், அப்புள்ளியில் உள்ள தொடுவரையும் ஒன்றுக் கொன்று செங்குத்தாக உள்ளன என்பதும் அறியக் கிடக்கின்றது. ஏனெனில், ஆரையின் சாய்வு $\frac{y}{x}$; ஆரையின் சாய்வு $\times$ தொடுவரை சாய்வு $= \frac{y}{x} \times -\frac{x}{y} = -1$.

**17·4.** முன்பத்தியில் நாம் கண்டபடி, $n$ பொது மாறிலிகள் கொண்ட ஒரு வளைவரைக் குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு. ஒரு $n$ — வரிசைச் சமன்பாடாகும்.

தலை மாற்றிக் கூறின், ஒரு $n$ வரிசைச் சமன் பாட்டின் தீர்வு கண்டால், அத்தீர்வில் $n$ பொது மாறிலிகள் தோன்றும்.

**17·5.** இப்போது, வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாட்டிலிருந்து, அதற்குறிய வகைக் கெழுச் சமன்பாடு காணும் முறையை சில எடுத்துக்காட்டுகள் கொண்டு விளக்குவோம்.

எடுத்துக்காட்டு *(1).*

$$y = ae^{\sin^{-1} x} \quad (1)$$

இதன் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு என்ன ?

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ae^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}} \quad (2)$$

*(1)*ம் *(2)*ம் கொண்டு $a$ என்ற மாறிலியை நீக்குவோம்.

(1)-லிருந்து $a = \dfrac{y}{e^{\sin^{-1} x}}$

இதை *(2)*ல் ஈடு செய்தால்,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{e^{\sin^{-1}x}} \cdot \frac{e^{\sin^{-1}x}}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$= \frac{y}{\sqrt{1-x^2}}$$

இதுவே நாம் வேண்டும் வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகும்.

எடுத்துக்காட்டு (2).

$a(y+a)^2 = x^3$ என்ற வளை வரைக் குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

கொடுக்கப்பட்டது, $\sqrt{a}\,(y+a) = \pm x^{3/2}$

எனவே, $\sqrt{a}.\ \dfrac{dy}{dx} = \pm \dfrac{3}{2}\, x^{\frac{1}{2}}$

$$\therefore a = \frac{9x}{4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}$$

$a$க்கு இம்மதிப்பை ஈடு செய்தால்,

$$\frac{9x}{4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\left\{y + \frac{9x}{4\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2}\right\}^2 = x^3$$

எனவாகும்.

இதைச் சுருக்கி எழுதினால்,

$$4y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + 9x = \frac{8}{3}\,x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

## பயிற்சிகள் 17.

1. கீழ்க் கண்ட வளைவரைக் குடும்பத்தின் சமன்பாடு கொண்டு, உரிய வகைக்கெழுச் சமன்பாடு காண்க.

(a) $y = ax + a^2 - a^3$.
(b) $y = a\cos mx + b\sin mx$.
(c) $y^2 = (x-c)^3$.

2. ஒரு பரவளையக் குடும்பத்தின் அச்சுக்கள், $x$-அச்சோடு, ஒருபோக்குக் கோடுகள். அவைகளின் குவிய மாறிலி (Latus Rectum) $4a$. அக்குடும்பத்தின் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

3. ஒரு வட்டக் குடும்பம், அச்சுக்களை தொடுவரையாகக் கொண்டுள்ளது. அதன் வகைக் கெழுச் சமன்பாடு யாது ?

பகுதி 18.

# வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்

(தொடர்ச்சி).

18·1 எப்படி, எல்லா விதச் சார்புகளுக்கும் தொகை காண முடியாதோ, அவ்வாறே, எல்லாவித வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளுக்கும் தீர்வு காணல் இயலாது.

ஆனால் குறிப்பிட்ட அமைப்புடைய சமன்பாடுகளுக்குத் தீர்வு காணலாம். அவ்விதமான குறிப்பிட்ட அமைப்புடைய சமன்பாடுகள் சிலவற்றை முதலில் ஆராய்வோம்.

18·2 **முதல் வரிசை, முதற் படிச் சமன்பாடுகள் :**

**அமைப்பு :**

மாறு ராசிகள் $x$, $y$ பிரிக்கப்படக்கூடிய வகையில் அமைந்திருப்பவை ; அல்லது சிறிது மாற்றங்களால் அவ் வகைக்கு மாற்றியமைக்கக் கூடிய வகையில் அமைந்திருப் பவை. (Variables separable and reducible to variables separable):

வகை 1 : நேரடியாகப் பிரிக்கக் கூடிய சமன்பாடுகள்;

வகை 2 : சமபடித்தானச் சமன்பாடுகள் ; (Homogeneous equations)

வகை 3 : வகை 2க்கு மாற்றியமைக்கக் கூடியவை ;

வகை 4 : சில பல ஈடுகள் செய்து வகை 1க்கு மாற்றக் கூடியவை.

18·21 வகை 1 : ஒரு சமன் பாட்டை,

$$f(x) \quad dx = F(y)\,dy$$

என்ற முறையில் அமைத்து எழுத முடியுமானால் அது முதல் வகையைச் சேரும்.

(ii) வட்டத்தின் பரப்பு $= \pi a^2$.

அதன் பு. க மையம் $C$.

இப்பரப்பு $OX$-ஐ ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றும் போது $C$ சுற்றும் தூரம் $2\pi r$ ஆகும்.

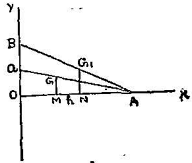
$\therefore$ ந. வளையத்தின் பருமம் $= \pi a^2 + 2\pi r$

$= 2\pi^2 a^2 r$.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு வட்டக் கூம்பின் அடி மட்ட அரை விட்டம் $a$, நேர் உயரம் $h$. அதன் பருமம், புறப்பரப்பு காண்க.

படத்தில் காட்டப்பட்ட $OA$ என்ற முக்கோணம் $OX$-ஐ ஒரு முழுச் சுற்று சுற்றினல், நாம் வேண்டிய கூம்பு கிடைக்கும்.




படம்-46

(i) பருமம் ;

முக்கோணப் பரப்பு $= \frac{1}{2}ah$

பரப்பின் பு.க மையம் $G$.

$$GM = \frac{a}{3}$$ என எளிதில் அறியலாம்.

எனவே பருமம் $= \frac{1}{2} ah \times 2\pi \frac{a}{3}$

$$= \frac{\pi a^2 h}{3} \qquad (1)$$

(ii) புறப்பரப்பு :

$AB$ என்ற கோட்டின் நீளம் $\sqrt{a^2+h^2}$

அக்கோட்டின் பு.க. மையம் $G_1$

$G_1 N = \frac{a}{2}$ என எளிதில் அறியலாம்.

எனவே புறப்பரப்பு $= \sqrt{a^2+h^2}\,\frac{a}{2} \times 2\pi$

$= \pi a\sqrt{a^2+h^2}$

$= \pi a \times$ சாய்வு நீளம். (2)

## பயிற்சிகள் 16

### பாப்பசுத் தேற்றங்கள்

1. பாப்பசுத் தேற்றம் கொண்டு ஒரு வட்ட உருட்டின் பருமத்தையும், புறப்பரப்பையும் காண்க.

2. $S$ பரப்புடைய ஒரு முக்கோணம், அதே தளத்தில், முக்கோணத்தை வெட்டாத ஓர் அச்சைச் சுற்றி வருகிறது. முக்கோணத்தின் மூலைகள், அச்சிலிருந்து, $\alpha, \beta, \gamma$ தூரத்திலுள்ளன. பெறப்படும் உருளைப் பருமம் $\frac{2\pi S(\alpha+\beta+\gamma)}{3}$ என நிறுவுக.

3. ஒரு வட்டம் (அரை விட்டம் $a$) ஒரு தொடு வரையை அச்சாகக் கொண்டு சுற்றி வரும் உருளையின் பருமம் $\pi a^3$ என நிறுவுக.

4. $x = a(\theta - \sin\theta)$; $y = a(1-\cos\theta)$-இன் ஒரு முழு வில், தன் நிலைத்தளத்தை அச்சாகக் கொண்டு ஒரு சுற்று சுற்றுகிறது. அவ்வுருளையின் புறப்பரப்பு $\frac{1}{8}\pi a^2$ என நிறுவுக.

5. $2ay^2 = x(x-a)^2$ என்ற வளையப்பரப்பு, $\bar{y} = a$ என்ற அச்சைச் சுற்றுகிறது. அவ்வுருளையின் பருமம் $\frac{8\sqrt{2}}{15}\pi a^3$ என நிறுவுக.

18·211 மேலும் : நாம் கண்ட சமன்பாடுத் தீர்வுகள் யாவற்றிலும் C என்ற ஏதாமொரு மாறிலியைக் கூட்டினோம். ஏனெனில் வகைக் கெழுகாணும்போது C ன் வகை கெழு சுன்னமாகிறது.

சில சமன்பாட்டுத் தீர்வுகளில், C என்பது ஏதாமொரு மாறிலியாக இல்லாமல், அதன் சிறப்பு மதிப்பு அறியக்கூடிய வகையில், ஒரு கட்டுப்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருக்கலாம். அப்படிப்பட்ட கட்டுப்பாடு கொடுக்கப்பட்டிருக்கும்போது, C ன் சிறப்பு மதிப்பை அறிய முடியும்.

எடுத்துக் காட்டு :

$x\,dy + 2y dx = 0$ ($x = 2, y = 1$ கட்டுப்பாடு)

தீர்வு : $\int \frac{dx}{x} + \int \frac{dy}{2y} = C$

அதாவது $\log x + \log \sqrt{y} = C$.

$\therefore x\sqrt{y} = A$ என்ற மாறிலி கட்டுப்பாட்டின்படி,

$2\sqrt{1} = A$

$\therefore A = 2$

$\therefore$ தீர்வு : $x\sqrt{y} = 2$

அல்லது $x^2 y = 4$ என்பது தீர்வாகும்.

18·212 மேலும் : ஒரு வளைவரையின் பண்பாக அமைகிற முறையில் வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் தரப்படலாம். முதலில் சமன்பாட்டை யமைத்து, அதன் தீர்வு காணலாம். இங்கு C என்ற மாறிலி பொதுவாகவும் இருக்கலாம் ; அல்லது ஒரு கட்டுப்பாட்டின்படி, C, ஒரு சிறப்பு மாறிலியாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

ஒரு வளைவரையின் அடித்தொடு கோட்டின் நீளம் (Subtangent) $x$ – ஆயத்தொலையையொட்டி நேர்மாற்றம் உடையதானால், அவ்வளைவரை யாது? அவ்வளைவரை (1, 2); (4, 4) என்ற புள்ளிகள் வழியாகச் செல்லுமானால், அவ்வளைவரையாது?

அடித்தொடு கோட்டின் நீளம் $= \dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}}$

கொடுக்கப்பட்டிருப்பது, $\dfrac{y}{\dfrac{dy}{dx}} \propto x$

அதாவது $y = Kx \dfrac{dy}{dx}$

$$\therefore K \frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore K \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

$$\therefore K \log y = \log Cx$$

$\therefore \quad y^k = Cx$ என்பது வளைவரை கட்டுப்பாட்டை பயன்படுத்தினால்,

$$2^k = C$$
$$4^k = 4C$$
$$\therefore 2^{2k} = 2^2 \cdot 2^k$$
$$\therefore 2K = K + 2$$
$$\therefore K = 2$$
$$C = 4$$

$\therefore$ வளைவரை $y^2 = 4x$ (ஒருபரவளையம்).

### பயிற்சிகள் 18 (b)

1. தீர்வு காண்க :

(a) $\cos y \, dx + (1 + e^{-x}) \sin y \, dy = 0$

கட்டுப்பாடு : $x = 0, \; y = \dfrac{\pi}{4}$.

(b) $(1-x^2)(1-y) = xy(1+y)\frac{dy}{dx}$.

கட்டுப்பாடு : $x = 1$, $y = 0$.

(c) $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{1-x^2}.\ \sin^{-1}x} = 0$

கட்டுப்பாடு : $y = 1$; $x = 1$.

2. (3, 4) வழியாகச் செல்லும் ஒரு வளைவரையின் அடிச் செங்கோடு, $x$-ன் ஆயத் தொலைக்குச் சமம் : அவ்வளை வரையாது ?

3. ஒரு ஆகாய விமானத்தின் விசைமாறு வீதம் $g\cos a - kv$; $g, k, a$ மாறிலிகள் ; $t = 0$ ஆனால் $v = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டையொட்டி, $v$ என்னவெனக் காண்க ?

4. ஒரு பொருளின் தேய்வு விகிதம் $kx$; $x$ அப்பொழு துள்ள பொருளின் பொருண்மை (mass); சரிபாதி பொருண்மை தேய $\frac{1}{k}\log_e 2$ விநாடிகள் ஆகும் என நிறுவுக.

5. நியூட்டன் குளிர்ச்சி விதிப்படி,

$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_0)$ இங்கு T ஒரு கோளத்தின் மேல் வெப்ப நிலை ; $t$, கால அளவு ; $T_0$ சூழ்நிலையின் வெப்ப நிலை ; $k$ ஒரு மாறிலி ; $t = 0$ ஆனால் $T = T_1$ என்பது கட்டுப் பாடு. இங்கு $T - T_0 = (T_1 - T_0)e^{-kt}$ என நிறுவுக.

## 18·22 வகை 2 : சமபடித்தானச் சமன்பாடுகள்

$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{F(x, y)}$ என்ற அமைப்புடைய சமன்பாட்டில், $f$, F என்ற இரண்டு சார்புகளும் $x$, $y$ என்ற ராசிகளின் ஒத்த சமபடித்தான கோவைகளாயின், இது ஒரு சம படித்தான சமன்பாடாகும்.

$\frac{dy}{dx} = \frac{x^3 + x^2y}{2y^3 + 3xy^2}$ ஒரு எடுத்துக்காட்டு. பின்னத்தின் மேற் கோவையும், கீழ்க் கோவையும் முப்படிக் கோவைகள்.

இவ்வகைப்பட்டச் சமன்பாடுகளின் தீர்வு காண, $y = vx$ என ஈடு செய்க. இங்கு $v$ என்பது $x$-ன் சார்பெனக் கொள்க. அப்படிச் செய்தால்,

$\frac{f(x, y)}{F(x, y)} = \phi(v)$ என்ற அமைப்புவரும். அப்போது,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{F(x, y)} \text{ என்பது}$$

$$v + x\frac{dv}{dx} = \phi(v) \text{ என மாறும்.}$$

$$\therefore x\frac{dv}{dx} = \phi(v) - v$$

இங்கு $x, v$ என்ற மாறு ராசிகள் பிரிக்கக் கூடிய முறையில் அமைய வகை (1)-ல் தீர்வு கண்ட முறையில், தீர்வு காணலாம்.

அதாவது $\int \frac{dv}{\phi(v) - v} = \int \frac{dx}{x} + c$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

அதன் பின் $v = \theta(x)$ அல்லது

$x = \theta_1(v)$ என்ற தீர்வுகாணலாம்.

$\because v = \frac{y}{x}$ என ஈடு செய்ய, $x, y$ என்ற ராசிகளின் கோவையாக ஒரு தீர்வு கிட்டும்.

18·221 எடுத்துக்காட்டு : தீர்வு காண்க :

$$x^2\frac{dy}{dx} + y(x + y) = 0.$$

$$\text{அதாவது} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-y(x+y)}{x^2}$$

$y = vx$ என ஈடு செய்தால்,

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{-vx(x+vx)}{x^2}$$

$$= -v(1+v)$$

$$\therefore \quad x\frac{dv}{dx} = -v - v^2 - v$$

$$= -2v - v^2$$

$$\therefore \quad \frac{dv}{-v\,(v+2)} = \frac{dx}{x}$$

$$\therefore -\int \frac{dv}{v\,(v+2)} = \int \frac{dx}{x}$$

ஆனல்

$$\frac{-1}{v\,(v+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{v+2} - \frac{1}{v}\right]$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\int\left(\frac{1}{v+2} - \frac{1}{v}\right)dv = \int\frac{dx}{x}$$

$$\therefore \quad \tfrac{1}{2}\log\left(\frac{v+2}{v}\right) = \log cx$$

$$\therefore \quad \log\left(\frac{v+2}{v}\right)^{\frac{1}{2}} = \log cx.$$

$$\therefore \quad \frac{v+2}{v} = c^2x^2 \text{ தீர்வாகும்}$$

$v = \dfrac{y}{x}$ என மறுபடியும் ஈடு செய்தால்,

$$\frac{y+2x}{y} = c^2x^2$$

அதாவது $y + 2x = kx^2y$ தீர்வாகும்.

இச் சமன்பாட்டில் $x=1$, $y = 1$ என்ற கட்டுப்பாடு கொடுக்கப்படுமானல்,

$$1 + 2 = k$$

$\therefore \quad 3x^2y = 2x + y$ தீர்வாகும்.

## பயிற்சிகள் 18 (c)

1. $y\sqrt{x^2+y^2} - x\,(x + \sqrt{x^2+y^2})\dfrac{dy}{dx} = 0$

2. $x^2\dfrac{dy}{dx} = y^2 + 2xy$ ($x = 1$, $y = 1$ கட்டுப்பாடு)

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y\,(y-2x)}{x\,(x-2y)}$

4. $2x \sinh\left(\frac{y}{x}\right) + 3y \cosh\left(\frac{y}{x}\right) = 3x \cosh\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx}.$

5. $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) - y \cos\left(\frac{y}{x}\right) + x \cos\left(\frac{y}{x}\right)\frac{dy}{dx} = 0$

6. $(y^3 - 3xy^2)\frac{dy}{dx} = x^3 + y^3$

7. $x(2y^4 - x^4)\frac{dy}{dx} = y(y^4 - x^4)$

8. $x^2 y = (x^3 + y^3)\frac{dy}{dx}.$

9. $\frac{dy}{dx} + \frac{x^2 + 3y^2}{3x^2 + y^2} = 0.$

10. $x(x - y)\frac{dy}{dx} + y^2 = 0.$

18·23 வகை 3 : சமபடித்தானச் சமன்பாடுகளாக மாற்றியமைக்கக் கூடியவை :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by + c}{lx + my + n}$$

என்ற சமன்பாடு ஒரு சமபடித்தானச் சமன்பாடல்ல. ஆனால் பின் குறிப்பிட்ட முறையில் அதை ஒரு சமபடித்தானச் சமன்பாடாக்கி, அதன் தீர்வு காணலாம்.

$x = X + h$

$y = Y + k$ என ஈடு செய்க ; $h, k$ மாறிலிகள்.

அப்போது $\frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dX}.$

$$ax + by + c = aX + bY + (ah + bk + c)$$

$$lx + my + n = lX + mY + (lh + mk + n)$$

இங்கு, $ah + bk + c = 0$

$$lh + mk + n = 0$$

என்ற கட்டுப்பாடு கொண்டு, $h, k$ நிர்ணயிக்கவும்.

எனவே,

$\frac{dY}{dX} = \frac{aX + bY}{lX + mY}$ என்ற ஒரு சமபடித்தானச் சமன்பாடு கிடைக்கும்.

$Y = VX$ என ஈடு செய்து, வகை (2)-ல் கூறியபடி, தீர்வு காண்க.

$Y = f(X)$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

அங்கு, $Y = y - k$; $X = x - h$ என ஈடுசெய்து,
$y = F(x)$ என்ற முடிவான தீர்வு காண்க.

குறிப்பு : ஆனல் $\frac{a}{l} = \frac{b}{m}$ ஆக $a, b, l, m$, அமைந்திருந்தால் முன் முறைப்படி,

$$ah + bk + c = o$$

$$lh + mk + n = o$$

என்ற இரு சமன்பாடுகளும் ஒன்றுக்கொன்று முரண்பாடாக இருக்கும்.

ஏனெனில் $\frac{a}{l} = \frac{b}{m} = p$ ஆனல், $h, k$ காணப்பயன்படும் சமன்பாடுகள்,

$$lph + mpk + c = o$$

$$lh + mk + n = o$$

எனவாகி, $h, k$ காண இயலாத சமன்பாடுகளாகிப் பயன் படாது போகும்.

இந்த நிலையில்,

$ax + by = z$ என ஈடு செய்து, தீர்வு காணலாம். ஒரு எடுத்துக்காட்டு பின்னர் சொல்லப்பட்டிருக்கிறது.

**18.231 எடுத்துக்காட்டு (1)**

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x + 2y - 3}{2x + y - 3}$$

$x = X + h$

$y = Y + k$ என ஈடு செய்ய,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y + h + 2k - 3}{2X + Y + 2h + k - 3}$$

$h + 2k - 3 = 0$

$2h + k - 3 = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்,

$h = 1,\ k = 1$ ஆகும்.

எனவே,

$$\frac{dY}{dX} = \frac{X + 2Y}{2X + Y}$$

இங்கு $Y = vX$ என ஈடு செய்தால்,

$$v + X\frac{dv}{dX} = \frac{1 + 2v}{2 + v}$$

$$\therefore X\frac{dv}{dX} = \frac{1 + 2v}{2 + v} - v$$

$$= \frac{1 + 2v - 2v - v^2}{2 + v}$$

$$= \frac{1 - v^2}{2 + v}$$

$$\therefore \int \frac{2 + v}{1 - v^2}\, dv = \int \frac{dX}{X}$$

$$\therefore \log\left(\frac{1 + v}{1 - v}\right) - \frac{1}{2}\log\left(1 - v^2\right) = \log cX$$

$$\therefore \log(1 + v) - \log(1 - v) - \tfrac{1}{2}\log(1 + v)$$
$$- \tfrac{1}{2}\log(1 - v) = \log cX$$

$$\therefore \log \frac{(1+v)^{1/2}}{(1-v)^{3/2}} = \log c\,X$$

$$\therefore \frac{(1+v)^{1/2}}{(1-v)^{3/2}} = c\,X$$

இருபக்கங்களையும் இருபடிக்குயர்த்தினல்

$$\frac{1+v}{(1-v)^3} = A\,X^2$$

இங்கு $v = \frac{Y}{X} = \frac{y-1}{x-1}$ என ஈடு செய்தால்

$$\frac{1+\frac{y-1}{x-1}}{\left(1-\frac{y-1}{x-1}\right)^3} = A\,(x-1)^2$$

அதாவது முடிவான தீர்வு :

$$(x+y-2) = A\,(x-y)^3.$$

எடுத்துக்காட்டு (2) :

(குறிப்பில் கூறப்பட்ட வகையைச் சேர்ந்தது).

தீர்வு காண்க : $\frac{dy}{dx} = \frac{2x+y-1}{4x+2y+1}$.

இச் சமன்பாடு குறிப்பில் கூறிய வகைப்படும்.

இங்கு $x = X + h.$
$y = Y + k.$

என்று ஈடு செய்து, $h$, $k$ காணப்பயன்படும்.
சமன்பாடுகள் $2h + k = 1.$
$4k + 2h = -1.$

என்ற முரண்பட்ட சமன்பாடுகளாகும். எனவே, இந்த ஈடு முறையை விடுத்து $z = 2x + y$ என ஈடு செய்வோம்.

அப்போது $\frac{dz}{dx} = 2 + \frac{dy}{dx}$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 2.$$

மேலும் $2x + y - 1 = z - 1.$

$4x + 2y + 1 = 2z + 1.$

எனவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு

$$\frac{dz}{dx} - 2 = \frac{z-1}{2z+1} \text{ எனமாறும்.}$$

அதாவது $$\frac{dz}{dx} = \frac{z-1}{2z+1} + 2$$

$$= \frac{5z+1}{2z+1}.$$

∴ மாறு ராசிகளைப் பிரித்தெழுதினல்,

$$\int \frac{2z+1}{5z+1} dz = \int dx.$$

$$\therefore \int \left[ \frac{2}{5} + \frac{3}{5(5z+1)} \right] dz = x + c$$

$$\therefore \frac{2}{5} z + \frac{3}{25} \log (5z+1) = x + c.$$

$$\therefore \frac{2}{5} (2x+y) + \frac{3}{25} \log (10x + 5y + 1) = x + c$$

என்பது தீர்வாகும்.

இதையே,

$10(2x+y) + 3 \log (10x + 5y + 1) = 25x + c^1$ என எழுதி,

$3 \log (10x + 5y + 1) = 5x - 10y + c^1$ எனத் தீர்வு காணலாம்.

### பயிற்சிகள் 18 ($d$)

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{3x - y - 1}{x - y + 3}$
2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x + 2y - 2}{3x + y - 5}$
3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x - y + 1}{x - 2y + 3}$

4. $\frac{dy}{dx} = \frac{2x + 9y - 13}{6x + 2y - 14}$

5. $(1 + y)\, dx = (1 + x)\, dy$

6. $(1 + 2y)\, dx = (4 - x)\, dy$

7. $(3x + 2y + 1)\, dx = (3x + 2y - 1)\, dy$

8. $\frac{4x + 6y + 5}{2x + 3y + 4} = \frac{dx}{dy}$

9. $(x - y) \frac{dy}{dx} = (x + y + 1)$

10. $\frac{dy}{dx} = \frac{x + y + 1}{2x + 2y + 3}$

18·24 வகை 4 : சில பல ஈடுபாடுகள் செய்து வகை (1)க்கு மாற்றக்கூடிய சமன்பாடுகள் : பின் கண்ட அமைப்புக்களை ஆராய்வோம் :

(i) $y f(xy)\, dx + x g(xy)\, dy = 0.$

(ii) $\frac{dy}{dx} = f(ax + by)$

(i) இந்த சமன்பாட்டில் $xy = z$ என ஈடு செய்தால், வகை (1)க்குக் கொண்டுவந்து தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

$y(xy + 1)\, dx + x(xy - 1)\, dy = 0.$

$xy = z$ என ஈடு செய்க.

வகைக்கெழுகண்டால்,

$$x \frac{dy}{dx} + y = \frac{dz}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx} - y\right)$$

கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y(xy+1)}{x(xy-1)}$$

$$= \frac{-y}{x}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\therefore \frac{1}{x}\left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{y}{x} = \frac{-y}{x}\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - y = -y\left(\frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = y\left(1 - \frac{z+1}{z-1}\right)$$

$$= \frac{-2y}{z-1}.$$

$$= \frac{-2z}{x(z-1)}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = \frac{-2z}{x(z-1)}$$

$$\therefore \int \frac{z-1}{z}\,dz = -\int \frac{2}{x}\,dx$$

$$\therefore z - \log z = \log cx^{-2}$$

$$\therefore z = \log cx^{-2}z$$

$$= \log\left(\frac{cz}{x^2}\right)$$

$$\therefore \frac{cz}{x^2} = e^{z}$$

$$\therefore \frac{cxy}{x^2} = e^{xy}$$

அதாவது $c\left(\frac{y}{x}\right) = e^{xy}$ என்பது தீர்வு.

அல்லது $y = A\,xe^{xy}$ என்பது தீர்வு.

(ii) $\frac{dy}{dx} = f\ (ax + by)$

$z = ax + by$ என ஈடு செய்து வகைக்கெழு, கண்டால்,

$$\frac{dz}{dx} = a + b\ \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b} \left(\frac{dz}{dx}\right) - \frac{a}{b}$$

$$\therefore \frac{1}{b}\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = f\ (z)$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} - a = b f\ (z)$$

$$\therefore \quad \frac{dz}{dx} = a + b f\ (z)$$

$$\therefore \quad \int dx = \int \frac{dz}{a + b\ f\ (z)}$$

என்றபடி,

$$x = \int \frac{dz}{a + b\ f\ (z)}$$ எனத் தீர்வு கிடைக்கும்:

$C$ என்ற மாறிலி கூட்டிக்கொள்க.

எடுத்துக்காட்டு :

$$\frac{dy}{dx} = a\ (x + y)^2$$

$z = x + y$ என ஈடு செய்தால்

$$\frac{dz}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx} - 1.$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \left(\frac{dz}{dx} - 1\right) = az^2$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = 1 + az^2$$

$$\therefore \int dx = \int \frac{dz}{a\left(z^2 + \frac{1}{a}\right)}$$

தொகைகாண,

$$x + C = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{a}}} \tan^{-1}\left(z\sqrt{a}\right)$$

அதாவது $\sqrt{a}\,(x + c) = \tan^{-1}\left(z\sqrt{a}\right)$

$$= \tan^{-1}\left[(x + y)\sqrt{a}\right]$$

அல்லது $\tan\left[\sqrt{a}\,(x + c)\right] = (x + y)\sqrt{a}$ தீர்வாகும்.

## பயிற்சிகள் 18 (e)

தீர்வு காண்க :

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y\,(xy + 1)}{x\,(1 + xy + x^2 y^2)} = 0.$
2. $y\,(1 - xy + x^2 y^2)\,dx + x\,(x^2 y^2 - xy)\,dy = 0.$
3. $y\,(1 + 2\,xy)\,dx + x\,(1 - xy)\,dy = 0.$
4. $(2x^2 + 3y^2 - 7)\,x\,dx - (3x^2 + 2y^2 - 8)\,y\,dy = 0.$

[ குறிப்பு : $x^2 = u$ ; $y^2 = v$ ஈடு செய்க. ]

5. $\dfrac{dy}{dx} = \sin(x + y)$
6. $\dfrac{dy}{dx} = \cos(x + y).$

## பகுதி 19.

### வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள் (தொடர்ச்சி).

**பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகளும், அவ்வகைக்கு மாற்றக் கூடிய சமன்பாடுகளும்.**

(Exact differential equations and equations reducible to that form) :

*19·1.* $F(x, y) = c$ என்ற சார்பிலே, $\frac{dy}{dx}$ கண்டு, அதை யொட்டியமைக்கப்பட்ட ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, பொருத்தமான சமன்பாடு எனப்படும்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$x^3 + y^3 + x^2 y + x y^2 = C.$$

என்ற சார்பில், $\frac{dy}{dx}$ காண,

$$3x^2 + 3y^2 \frac{dy}{dx} + 2xy + x^2 \frac{dy}{dx} y^2 + 2xy \frac{dy}{dx} = 0$$

ஆக

$$\frac{dy}{dx}(x^2 + 2xy + 3y^2) + (3x^2 + 2xy + y^2) = 0$$

எனவே,

$$(3x^2 + 2xy + y^2)\, dx + (x^2 + 2xy + 3y^2)\, dy = 0 \qquad (1).$$

என்ற வகைக்கெழுச் சமன்பாடு அமைகிறது. இதன் தீர்வு, $x^3 + y^3 + x^2 y + xy^2 = c$ என்பது வெளிப்படை. இவ்விதமாக அமைக்கப்பட்ட சமன்பாடு (1) ஒருபொருத்தமான சமன்பாடு எனப்படும்.

19·11

ஒரு கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு பொருத்தமானது என்று எப்படி முடிவு கட்டுவது ? அதன் தீர்வு காணும் வழி யாது ? இவைகளை இப்போது ஆராய்வோம்.

ஒரு முதல் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடு பொருத்தமானதாக விருக்க (1) தேவையான, (2) போதுமான கட்டுப்பாடு என்ன ?

அதாவது $M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற சமன்பாடு எப்போது பொருத்தமானதாயிருக்கும் ?

அது பொருத்தமானதாயிருப்பின், அச்சமன்பாடு,

$F(x, y) = c$ என்ற சார்பையொட்டி அமைந்திருக்க வேண்டும்.

அப்போது,

$$dF = M\,dx + N\,dy$$
$$= \frac{\partial F}{\partial x}dx + \frac{\partial F}{\partial y}dy$$

எனவே, $M = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ ; $N = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

என்ற கட்டுப்பாடு தேவை.

F ஐ நீக்கி விடுவதற்காக, $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்பது பெறப்படும். எனவே $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்ற கட்டுப்பாடு தேவையானது (Necessary).

இரண்டாவதாக, $M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ஆனல் அச், சமன்பாடு பொருத்தமானதா ? அதாவது $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ என்பது ஒரு போதுமான கட்டுப்பாடா வென ஆராய்வோம்.

M என்ற சார்பில், $y$ ஐ ஒருமாறிலியாகக் கொண்டு $\int M\,dx = V$ எனக்கொள்வோம்.

அப்போது $\dfrac{\partial V}{\partial x} = M$.

$$\therefore \frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \text{ (கொடுக்கப்பட்டது)}$$

$$\therefore \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)$$

$$\therefore\ N = \frac{\partial V}{\partial y} + \phi^1(y)\ ; \qquad \phi^1(y) \text{ ஒரு } y\text{-சார்பு}$$

$$\therefore\ M\,dx + N\,dy = \frac{\partial V}{\partial x}\,dx + \frac{\partial V}{\partial y}\,dy + \phi^1(y)\,dy$$

$= d\,[\,V + \phi(y)\,]$ என்ற ஒரு பொருத்தமான வகை நுண் அமைப்பு. எனவே, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ ஆனால், $M\,dx + N\,dy$ என்பது $d\,[\,V + \phi(y)\,]$ என்ற ஒரு பொருத்தமான வகைநுண் அமைப்பாக வாகிறது.

தீர்வு $V + \phi(y) = C$ எனப் பெறப்படும்.

எனவே, முன் கூறப்பட்ட ஆராய்ச்சியில், பின்வரும் தேற்றம் பெறப்படுகிறது :

$M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு, பொருத்தமானதாயிருப்பதற்கு, $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{dx}$ என்ற கட்டுப்பாடு, தேவையானதும், போதுமானதும் ஆகும்.

*19·12* தீர்வு காணும் முறை :

$M\,dx + N\,dy = 0$ என்ற சமன்பாட்டில் $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x}$ எனக் கொள்வோம். எனவே அது ஒரு பொருத்தமான வகைக்கெழுச் சமன்பாடாகிறது.

இதன் தீர்வு காண,

முதலில், $y$ ஒரு மாறிலியெனக் கொண்டு, $\int M\,dx$ என்னவென அறிக. பின்னர் அத்தொகையில் இல்லாத உறுப்புக்கள் $\int N\,dy$ல் எவையெவை எனக்கண்டு, இரண்டையும் கூட்ட, தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு (1) தீர்வு காண்க :

$$(c^2 - 2\,xy - y^2)\,dx - (x^2 + y^2 + 2\,xy)\,dy = 0$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = -\,2x - 2y = \frac{\partial N}{\partial x}$$

எனவே இது ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடு

$$\int (c^2 - 2\,xy - y^2)\,dx = c^2\,x - x^2\,y - xy^2 \qquad (1)$$

$$\int \left( -\,x^2 - y^2 - 2\,xy \right) dy = -\,x^2\,y - \frac{y^3}{3} - xy^2 \qquad (2)$$

(2)ல் உள்ள, $-x^2 y - xy^2$ (1)ல் உள்ளது.

(2)ல் இருந்து, (1)ல் இல்லாதது $-\frac{y^3}{3}$

எனவே, தீர்வு $c^2 x - x^2 y - xy^2 - \frac{y^3}{3} = A$.

இதையே $\int N\, dy = -x^2 y - \frac{y^3}{3} - xy^2$ என்று முதலில் கண்டு, பிறகு,

$\int M\, dx = c^2 x - x^2 y - xy^2$ என்று கண்டு,
$\int N\, dy$ல் இல்லாமல் $\int M\, dx$ல் இருப்பதை
$\int N\, dy$ ஓடு சேர்த்துத் தீர்வு காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு (2) தீர்வு காண்க.

$(3e^{3x} y - 2x)\, dx + e^{3x}\, dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 3e^{3x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

எனவே இது பொருத்தமான சமன்பாடு.

$\int e^{3x}\, dy = ye^{3x}$ (1)

$\int (3e^{3x} y - 2x)\, dx = ye^{3x} - x^2$ (2)

(2)ல் உள்ள $ye^{3x}$ (1)ல் உள்ளது ;

(2)ல் இருந்து (1)ல் இல்லாதது $-x^2$

எனவே தீர்வு $ye^{3x} - x^2 = A$.

**19.13** வேறு சில அமைப்பிலுள்ள சமன்பாடுகள், நேரடியாகப் பொருத்தமானச் சமன்பாடுகளாக இல்லாவிடினும், ஒரு குறிப்பிட்டச் சினையால் பெருக்கினால், அவைகளைப் பொருத்தமான சமன்பாடாக மாற்ற இயலும். கீழ்க் கண்ட சில விதிகள் அம்மாற்றம் செய்யப் பயன்படும்.

**19.14** மாற்றம் செய்யப் பயன்படும் அப்பெருக்குச் சினைகள், தொகைப் பெருக்குச் சினைகள் (Integrating factors) எனப்படும்.

விதிகளும், தொகைப் பெருக்குச் சினைகளும் :

$Mdx + Ndy = 0$ என்பது சமன்பாடு.

(1) $$\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = f(x)$$ ஆனால்,

$e^{\int f(x)\, dx}$ தொகைப் பெருகுச் சினையாகும்.

(2) $\dfrac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{M} = \phi(y)$ ஆனால்,

$e^{\int \phi(y)\, dy}$ தொகைப்பெருக்குச் சினையாகும்.

(3) $M\,dx + N\,dy = 0$ என்பது ஒரு சமப்படித்தான கோவையாக இருந்து $Mx + Ny \neq 0$ ஆனால்,

$\dfrac{1}{Mx + Ny}$ தொகைப் பெருக்குச் சினையாகும்.

(4) $M\,dx + N\,dy = 0$ என்பதை,

$y\,f(xy)\,dx + x\,\phi(xy)\,dy = 0$ என்ற அமைப்பில் எழுத முடியுமானால், $Mx \neq Ny$ ஆகும்போது, $\dfrac{1}{Mx - Ny}$ தொகைப் பெருக்குச் சினையாகும்.

(5) மேலும், கீழ்க்கண்ட சில விதிகளும் பயன்படுவனவாம் :—

| | உறுப்புகள். | தொகைப் பெருக்குச்சினை. | பொருத்தமான வகை நுண் அமைப்பு. |
|---|---|---|---|
| | (1) | (2) | (3) |
| (i) | $xdy - ydx$ | $\dfrac{1}{x^2}$ | $\dfrac{xdy - ydx}{x^2} = d\left(\dfrac{y}{x}\right)$ |
| (ii) | $xdy - ydx$ | $\dfrac{1}{y^2}$ | $-\left(\dfrac{ydx - xdy}{y^2}\right) = d\left(\dfrac{-x}{y}\right)$ |
| (iii) | $xdy - ydx$ | $\dfrac{1}{xy}$ | $\dfrac{dy}{y} - \dfrac{dx}{x} = d\log\left(\dfrac{y}{x}\right)$ |
| (iv) | $xdy - ydx$ | $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ | $\dfrac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2} = \dfrac{\dfrac{xdy - ydx}{x^2}}{1 + \left(\dfrac{y}{x}\right)^2} = d\left[\tan^{-1}\left(\dfrac{y}{x}\right)\right]$ |

**19·15 எடுத்துக்காட்டு (1).**

தீர்வு காண்க : $y(1-x)\,dx - x\,dy = 0$

$$M = y(1-x)$$
$$N = -x$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{1-x+1}{-x}$$

$$= 1 - \frac{2}{x}$$

$$= f(x)$$

19.14 விதி (i) படி, தொகைப் பெருக்குச் சினை

$$= \int\limits_{e} \left(1 - \frac{2}{x}\right) dx$$

$$= x^{-2}e^{x}$$

$$\therefore\ x^{-2}\,e^{x}\,y(1-x)\,dx - x^{-2}\,e^{x}\,x\,dy = 0$$

அதாவது $\quad -e^{x}\dfrac{(x\,dy - y\,dx)}{x^2} - \dfrac{y}{x}\,e^{x}\,dx = 0$

அதாவது $\quad -e^{x}\,d\left(\dfrac{y}{x}\right) - \dfrac{y}{x}\,d\left(e^{x}\right) = 0$

அதாவது $\quad -d\left(e^{x}.\dfrac{y}{x}\right) = 0.$

∴ தீர்வு $\quad \dfrac{e^{x}\,y}{x} = C.$

அல்லது $\quad y = Cxe^{-x}$

எடுத்துக்காட்டு (2)

தீர்வு காண்க :

$$y(2xy+1)\,dx + x(1+2xy-x^3y^3)\,dy = 0$$

அமைப்பு : $y f(xy)\,dy + x\,\phi(xy)\,dy = 0$

$$M = y(2xy+1)$$
$$N = x(1+2xy-x^3y^3)$$

இங்கு $Mx - Ny \neq 0$ ஆனால், இங்கு 19·14, விதி (4)-ன் படி,

$\dfrac{1}{Mx - Ny}$ ஒரு தொகைப் பெருக்குச் சினையாகும்.

$$\frac{1}{Mx - Ny} = \frac{1}{2x^2y^2 + xy - xy - 2x^2y^2 + x^4y^4}$$

$$= \frac{1}{x^4\,y^4}$$

தொகைப் பெருக்குச் சினையால் பெருக்கினால்

$$\left(\frac{2}{x^3 y^2}+\frac{1}{x^4 y^3}\right) dx + \left(\frac{1}{x^3 y^4}+\frac{2}{x^2 y^3}-\frac{1}{y}\right) dy = 0.$$

$M^1\,dx + N^1\,dy = 0$ என்ற அமைப்பு

$$\frac{\partial M^1}{\partial y} = -\frac{4}{x^3 y^3} - \frac{3}{x^4 y^4}$$

$$\frac{\partial N^1}{\partial x} = -\frac{3}{x^4 y^4} - \frac{4}{x^3 y^3}$$

$$\therefore \frac{\partial M^1}{\partial y} = \frac{\partial N^1}{\partial x}$$

$\therefore M^1\,dx + N^1\,dy = 0$ ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடாகும்.

$$\int\left(\frac{2}{x^3 y^2}+\frac{1}{x^4 y^3}\right) dx = -\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{3x^3 y^3}$$

$$\int\left(\frac{1}{x^3 y^4}+\frac{2}{x^2 y^3}-\frac{1}{y}\right) dy = -\frac{1}{3x^3 y^3} - \frac{1}{x^2 y^2} - \log y$$

$\therefore$ தீர்வு முறைப்படி,

$$-\frac{1}{x^2 y^2} - \frac{1}{3x^3 y^3} - \log y = -C$$

$$\therefore \quad \frac{1}{x^2 y^2} + \frac{1}{3x^3 y^3} + \log y = A$$ தீர்வாகும்.

## பயிற்சிகள் 19 (a).

தீர்வுகாண்க :

1. $(x^2 - 4xy - 2y^2)\,dx + (y^2 - 4xy - 2x^2)\,dy = o$

2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{ax + hy + g}{hx + by + f} = o.$

3. $(e^y + 1)\cos x\,dx + e^y \sin x\,dy = o.$

4. $y(x^2 + y^2 + a^2)\,dy + x(x^2 + y^2 - a^2)\,dx = o$

5. $(x^2 + y^2)^n (xy^2\,dx - x^2 y\,dy) = o$ என்ற சமன்பாடு ஒரு பொருத்தமான சமன்பாடானால், $n$ன் மதிப்பு என்ன? கண்டபின் தீர்வு காண்க.

6. $(2x - y)\,dx + (2y + x)\,dy = o$க்கு $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ ஒரு தொகைப் பெருக்குச் சினையானல், அதன் தீர்வுகாண்க.

7. $(x^2 y^3 + 2y)\,dx + (2x - 2x^3 y^2)\,dy = o.$

8. $x\,dx + y\,dy + 4y^3(x^2 + y^2)\,dy = o.$

[குறிப்பு: $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ ஒரு தொகைப் பெருக்குச்சினை].

9. $(2xy\,e^{x^2y} + y^2e^{xy^2} + 1)\,dx + (x^2e^{x^2y} + 2xy\,e^{xy^2} - 2y)\,dy = o.$

## 19.2 நேரிய சமன்பாடுகள் (Linear Equations).

அமைப்பு: $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$

என்ற சமன் பாட்டில், P-ம், Q-ம், $x$-ஐ மாத்திரம் பொருத்த சார்புகள். P, Q இரண்டும் மாறிலிகளாகவும் இருக்கலாம்.

முதலில் $\dfrac{dy}{dx} + Py = 0$ என்பதற்கு தீர்வு காண்போம்.

$$\frac{dy}{y} = -Pdx$$

$$\therefore \quad \log y = -\int Pdx$$

$$\therefore \quad y = C\,e^{-\int Pdx}$$

$\therefore \quad ye^{\int Pdx} = C$ என்பது தீர்வாகும்.

இப்போது $\dfrac{d}{dx}\left[ye^{\int Pdx}\right] = \dfrac{d}{dx}\left[c\right]$
$= 0$

அதாவது, $\dfrac{dy}{dx}\,e^{\int Pdx} + ye^{\int Pdx}\,.\,P = 0$

இதை $\dfrac{dy}{dx} + Py = 0$ என்ற சமன்பாடோடு

ஒப்பிட்டுப் பார்க்கும்போது,

$e^{\int P\,dx}\left[\dfrac{dy}{dx}+Py\right]=0$ என அறிகிறோம். எனவே,

$\left(\dfrac{dy}{dx}+Py\right)$ஐ $e^{\int P\,dx}$ ஆல் பெருக்கினால், நமக்கு, $\dfrac{d}{dx}\left[y\,e^{\int P\,dx}\right]$ கிடைக்கிறது. ஆகவே, $\dfrac{dy}{dx}+Py=0$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு $e^{\int P\,dx}$ என்பது ஒரு தொகைப் பெருக்குச் சினையெனத் தெரிகிறது.

இதைக்கொண்டு,

$\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண்போம். இச்சமன்பாட்டின் இருபக்கங்களையும் $e^{\int P\,dx}$ ஆல்பெருக்கினால்,

$$\text{இடது கைப்புறம்} = e^{\int P\,dx}\left(\frac{dy}{dx}+Py\right)$$
$$= \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int P\,dx}\right].$$

என்ற ஒரு பொருத்தமான (exact) வகைக்கெழுப் பகுதி கிடைக்கிறது.

$$\text{வலது கைப்புறம்} = Qe^{\int P\,dx}$$

எனவே,

$$\frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int P\,dx}\right]=Qe^{\int P\,dx}.$$

$$\therefore\ ye^{\int P\,dx}=\int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx+C$$

என்ற தீர்வு கிடைக்கிறது.

எனவே $\dfrac{dy}{dx}+Py=Q$ என்ற சமன் பாட்டிற்கு $e^{\int P\,dx}$ ஒரு தொகைப் பெருக்குச் சினை. அதைக் கொண்டு இரு பக்கங்களையும் பெருக்கினால்,

$$\frac{d}{dx}\left[y\,e^{\int P\,dx}\right]=Q\,e^{\int P\,dx}$$ கிடைக்கிறது

எனவே தீர்வு,

$$y\,e^{\int P\,dx} = \int Q\,e^{\int P\,dx}\,dx + C.$$

**19·21** எடுத்துக்காட்டு (1) :

தீர்வு காண்க :

$$\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}\,y = e^{x}.$$

இங்கு $\int P\,dx = \int \frac{2}{x}\,dx = \log x^2$

$$\therefore\ e^{\int P\,dx} = e^{\log x^2} = x^2$$

எனவே, தொகைப் பெருக்குச் சினை $= x^2$

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left[y\,e^{\log x^2}\right] = e^{x}\,.\,e^{\log x^2}$$

எனவே தீர்வு,

$$\begin{aligned} y\,x^2 &= \int e^{x}\,.\,x^2\,dx + C \\ &= (x^2 - 2x + 2)\,e^{x} + C \end{aligned}$$

எடுத்துக்காட்டு *(2)* :

தீர்வு காண்க : $(1 - 3\,xy)\,\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 0$ இங்கு $x$ ஐ சார்புடை மாறியாகவும் (dependent variable), $y$ ஐ சார்பில் மாறியாகவும் கொண்டு சமன்பாட்டை மாற்றி அமைக்கவேண்டும். இவ் வழியிலும் சிலசில சமன்பாடுகளின் தீர்வு கிடைக்கும்.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{3\,xy - 1}$$

$$\begin{aligned} \therefore\ \frac{dx}{dy} &= \frac{3\,xy - 1}{y^2} \\ &= \frac{3\,x}{y} - \frac{1}{y^2} \end{aligned}$$

$$\therefore\ \frac{dx}{dy} - \frac{3}{y}\,x = -\,\frac{1}{y^2}$$

$$\begin{aligned} \text{இங்கு } \int P\,dy &= \int -\,\frac{3}{y}\,dy \\ &= \log\,y^{-3} \\ &= \log\,\left(\frac{1}{y^3}\right) \end{aligned}$$

எனவே தொகைப் பெருக்குச் சினை $= e^{\int P dy} = e^{\log\left(\frac{1}{y^3}\right)}$

$$= \frac{1}{y^3}.$$

$$\therefore \frac{d}{dy}\left[x \cdot \frac{1}{y^3}\right] = -\frac{1}{y^2} \cdot \frac{1}{y^3}$$

$$\therefore \frac{x}{y^3} = -\int \frac{1}{y^5}\, dy$$

$$= \frac{1}{4y^4} + C$$ தீர்வாகும்.

19·3. $\frac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற அமைப்புக்கு மாற்றக்கூடிய ஒரு சமன்பாட்டு வகை :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

இங்கு P, Q இரண்டும் $x$ ஐ மாத்திரம் ஒட்டிய சார்புகள். இச் சமன்பாட்டை ஒரு குறிப்பிட்ட ஈடு செய்து $\frac{dv}{dx} + P^1 v = Q^1$ என்ற அமைப்பில் பின் கூறியபடி கொண்டு வரலாம். [$P^1$, $Q^1$ இரண்டும் $x$ ஐ மாத்திரம் ஒட்டிய சார்புகள்.]

$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$ ஐ எடுத்துக்கொள்வோம். இருபக்கங்களையும், $y^n$ ஆல் வகுக்க,

$\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} + \frac{P}{y^{n-1}} = Q$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கும்.

இங்கு $\frac{1}{y^{n-1}} = v$ என ஈடு செய்தால்,

$$-\frac{(n-1)}{y^n} \frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$$ வெளிப்படை.

எனவே, $\frac{1}{y^n} \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{n-1} \frac{dv}{dx}$. ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு,

$-\frac{1}{n-1}\frac{dv}{dx} + Pv = Q$ என்ற அமைப்பில் வரும்.

இருபக்கங்களையும், $-(n-1)$ ஆல் பெருக்க,

$$\frac{dv}{dx} - P(n-1)v = -Q(n-1)$$

அல்லது

$\frac{dv}{dx} + P^1 v = Q^1$ என்ற அமைப்பில் வரும்.

இங்கு $P^1$, $Q^1$ இரண்டும் $x$-ஐ மாத்திரம் ஒட்டிய சார்புகளாம்.

எனவே, இதன் தீர்வு,

$$ve^{\int P^1 dx} = \int Q^1 e^{\int P^1 dx} dx + C$$

எனக் கிடைக்கும்.

$v = \frac{1}{y^{n-1}}$ என ஈடு செய்ய, நமக்கு,

$x$, $y$ தழுவிய தீர்வு கிடைக்கும்.

**19·31. எடுத்துக்காட்டு :**

தீர்வு காண்க : $2x\frac{dy}{dx} = y - 4y^3$

அதாவது, $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{2x} = -\frac{2y^3}{x}$.

இருபக்கங்களையும் $y^3$ ஆல் வகுக்க,

$$\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{2y^2 x} = -\frac{2}{x}$$

இங்கு $\frac{1}{y^2} = v$ என ஈடு செய்தால்,

$-\frac{2}{y^3}\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx}$ கிடைக்கும்,

ஆகவே, $\frac{1}{y^3}\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx}$.

$$\therefore -\frac{1}{2}\frac{dv}{dx} - \frac{1}{2}\frac{v}{x} = -\frac{2}{x}$$

எனவே, $\frac{dv}{dx} + \frac{v}{x} = \frac{4}{x}$ என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

[இது $\dfrac{dy}{dx} + Py = Q$ என்ற அமைப்பிலுள்ளது.]

இதன் தீர்வு முன்னர்போலக் காணவேண்டும்

$$\int P\,dx = \int \tfrac{1}{x}\,dx = \log x$$

$$\therefore\quad e^{\int P\,dx} = e^{\log x} = x.$$

எனவே தொகைப் பெருக்குச் சினை $= x$.

$$\therefore\ \frac{d}{dx}\left(vx\right) = \frac{4}{x}.\,x$$

$$= 4$$

$$\therefore\quad vx = \int 4\,dx$$

$$= 4x + c$$

ஆனால் $v = \dfrac{1}{y^2}$

$\therefore$ தீர்வு, $\dfrac{x}{y^2} = 4x + c$

அல்லது $x = y^2\,(4x + c)$

## பயிற்சிகள் 19 (b)

தீர்வு காண்க.

1. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{1-2x}{x^2}\,y = 1.$

2. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{y}{(1-x^2)^{3/2}} = \dfrac{x+\sqrt{1-x^2}}{(1-x^2)^2}$

3. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{n}{x}\,y = \dfrac{a}{x^n}$

4. $\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{4x}{1+x^2}\,y = \dfrac{1}{(x^2+1)^3}$

5. $\cos^2 x\,\dfrac{dy}{dx} + y = \tan x$

6. $\dfrac{dy}{dx} + y\cos x = \sin 2x$ [கட்டுப்பாடு : $x = 0\,;\ y=0$]

7. $2y - 3x \dfrac{dy}{dx} = e^{x} y^4$

8. $5(1 + x^2) \dfrac{dy}{dx} = xy - x(1 + x^2) y^6$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y + 1}{x - 2xy + e^{-2y}}$ .

10. $y - x \dfrac{dy}{dx} = a\left(1 + x^2 \dfrac{dy}{dx}\right)$

11. $(y - x) \dfrac{dy}{dx} = a^2$

12. $(2x - 10y^3) \dfrac{dy}{dx} + y = 0.$

**19·4 முதல் வரிசை வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள், ஆனல் முதற்படி அல்லாதவை.**

முன் பகுதிகளில், முதல் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடுகள் சில கண்டோம். இப்போது முதல் வரிசை, ஆனல் முதற்படி அல்லாத சில சமன்பாடுகள் காண்போம்.

இங்கு $\dfrac{dy}{dx} = p$ எனக் கொள்வோம்.

ஒரு வகைக்கெழுச் சமன்பாடு,

$$[p - f_1(x,y)]\,[p - f_2(x,y)] \ldots\ldots [p - f_n(x,y)] = 0 \qquad (1)$$

என்ற அமைப்பில் இருப்பதாக வைத்துக்கொள்வோம்.

இங்கு $p = f_1(x, y)$ ;

$p = f_2(x, y)$ ;

. . . . . .

. . . . . .

$p = f_n(x, y)$.

என்ற $n$ சமன்பாடுகள் கிடைக்கின்றன, எனவே,

$p = f_1(x,y)$-ஐ எடுத்துக்கொண்டால்

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x, y).$$

முன் பகுதிகளில் காட்டப்பட்ட ஏதாமொரு முறையில் இதன் தீர்வு,

$y = F_1(x, y) + c$ என அறியலாம் ;

அல்லது $F_1(x, y, c_1) = 0$ எனவும் அமையலாம்.

இவ்வாறே $n$ தீர்வுகள் கிடைக்கப்பெறலாம். அதாவது,

$$F_1(x, y, c_1) = 0$$
$$F_2(x, y, c_2) = 0$$
$$\text{— — — —}$$
$$F_n(x, y, c_n) = 0$$

எனத் தீர்வுகள் அமையலாம்.

இத் தீர்வுகள் யாவும் (1)ன் தீர்வுகளாகும். மேலும், இத் தீர்வுகள் யாவிலும், $C_1, C_2, \ldots C_n$ க்குப் பதிலாக C என்ற ஒரே மாறிலியைக் கொண்டாலும், தீர்வுகளின் பொதுத் தன்மை மாறுது. மேலும், இத் தீர்வுகள் யாவற்றையும்,

$F_1(x, y, c) \times F_2(x, y, c) \times \ldots . F_n(x, y, c) = 0$ எனவும் எழுதலாம்.

**19·41** சிறப்பாக, இவ்வகைச் சமன்பாடுகள் மூன்று விதமாக அமையலாம்.

1. $p$ அறிந்து தீர்வு காணல் ;
2. $x$ அறிந்து தீர்வு காணல் ;
3. $y$ அறிந்து தீர்வு காணல் .

முறையே இவ்விதமான சமன்பாடுகளின் தீர்வுகாணும் வகையை சில எடுத்துக்காட்டுக்கள் கொண்டு விளக்குவோம்.

***19·411.*** *$p$ அறிந்து தீர்வு காணல் :*

(i) $p^2 - 2p - 3 = 0$

$\therefore \quad (p - 3)(p + 1) = 0$

எனவே $p = 3, -1$

அதாவது $\dfrac{dy}{dx} = 3$

$\dfrac{dy}{dx} = -1$ என இரண்டு சமன்பாடுகள்

$\dfrac{dy}{dx} = 3$-ன் தீர்வு காண,

$y = 3x + c_1$

$\dfrac{dy}{dx} = -1$-ன் தீர்வு காண,

$y = -x + c_2$

இதையே,

$(y-3x-c_1)(y+x-c_2)=0$ என்றோ

$(y-3x+c)(y+x+c)=0$ என்றோ எழுதலாம்.

(ii) தீர்வு காண்க :

$$y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+(x-y)\frac{dy}{dx}-x=0$$

$$\therefore \quad y\,p^2+(x-y)\,p-x=0$$

$$\therefore \quad p=\frac{(y-x)\pm\sqrt{(x-y)^2+4xy}}{2y}$$

$$=\frac{(y-x)\pm(x+y)}{2y}$$

$$=2 \text{ அல்லது } -\frac{x}{y}.$$

எனவே, $\dfrac{dy}{dx}=2$

இதன் தீர்வு $y=2x+c$.

மேலும் $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$.

$$\therefore \quad y\,dy+x\,dx=0$$

இதன் தீர்வு $x^2+y^2=c^2$

இவ்விரண்டு தீர்வுகளையும்,

$(y-2x-c)(x^2+y^2-c^2)=0$ எனவும்,

சேர்த்தெழுதலாம்.

(iii) தீர்வு காண்க :

$$(p+y+x)(px+y+x)(p+2x)=0$$

எனவே $\dfrac{dy}{dx}=p=-(x+y)$ (1)

$$\frac{dy}{dx}=p=-\left(\frac{x+y}{x}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{dy}{dx}=p=-2x. \qquad (3)$$

(1)ஐ எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{dy}{dx}+y=-x.$$

இதன் தீர்வு $ye^x=\int -xe^x\,dx$

$$=-xe^x+e^x+c \qquad (1)$$

(2)-ஐ எடுத்துக் கொண்டால்,

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -1$$ எனப் பெறப்படும்.

இதன் தீர்வு $xy = \int -x\,dx$

$$= \frac{-x^2}{2} + C. \qquad (2)$$

(3)-ஐ எடுத்துக்கொண்டால்,

$$\frac{dy}{dx} = -2x$$

இதன் தீர்வு $y = -x^2 + C \qquad (3)$

இம் மூன்றையும் சேர்த்து,

$$(y + x - 1 - ce^{-x})\,(x^2 + 2xy - 2c)\,(x^2 + y - c) = 0$$

என்றும் எழுதலாம்.

**19·412** $y$ அறிந்து தீர்வு காணல் :

இங்கு, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டிலிருந்து, $y = f(x, p)$ எனத் தெரிவதாகக் கொள்வோம்.

$y = f(x, p) \qquad (1)$

இதன் இருபக்கங்களுக்கும், $x$ வகைக்கெழு கண்டால்,

$$p = \frac{dy}{dx} = \phi\left(x, p, \frac{dp}{dx}\right) \qquad (2)$$

எனவரும்.

(2)-லிருந்து, $F(x, p, c) = 0 \qquad (3)$

என ஒரு தீர்வு கிடைக்கலாம்.

(1)-க்கும் (3)-க்கும் இடையே, $p$-ஐ நீக்கி விட்டால், ஒரு $x, y$ சார்பு கிடைக்கும். அதுவே நாம் வேண்டும் தீர்வாகும்.

(1)-க்கும் (3)-க்கும் இடையே, $p$-ஐ நீக்கிய சார்பு பெறுவது இயலாதுபோயினும்,

(1)-ம் (3)-ம் தீர்வாக அமையும்.

எடுத்துக்காட்டு : தீர்வு காண்க.

$y = 3x + a \log p \qquad (1)$

$x$ — வகைக்கெழுகண்டால்,

$$p = \frac{dy}{dx} = 3 + \frac{a}{p}\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore\ (p - 3)\,p = a\frac{dp}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{a} = \int \frac{dp}{p\,(p-3)}$$

அதாவது $\dfrac{x}{a} = \dfrac{1}{3} \log \left( \dfrac{p-3}{p} \right) + C.$

$$\therefore \frac{p-3}{p} = Ae^{\frac{3x}{a}}$$

$$\therefore p = \frac{3}{\left(1 - Ae^{\frac{3x}{a}}\right)} \qquad (2)$$

இதை (1)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$y = 3x + a \log \left\{ \frac{3}{1 - Ae^{\frac{3x}{a}}} \right\}$$ தீர்வாகும்.

19.413. $x$ அறிந்து தீர்வு காணல் :

இங்கு $x = f\,(y, p)$ (1)

என அறியவரும்.

இருபக்கங்களுக்கும், $y$-வகைக் கெழுக்கண்டால்

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = \phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right)$$

இதைக் கொண்டு,

$$F\,(y, p, c) = 0 \qquad (2)$$

எனத் தீர்வு கிடைக்கலாம்.

(1)-க்கும் (2)-க்கும் இடையே, $p$-ஐ நீக்க, நமக்கு வேண்டிய தீர்வு கிடைக்கும்.

$p$-ஐ நீக்குதல் அரிதாயின்,
(1)-ம் (2)-ம் சேர்ந்து தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்வு காண்க :

$$xp^3 = a + bp$$

எனவே $x = ap^{-3} + bp^{-2}.$ (1)

$y$ வகைக் கெழுகண்டால்,

$$\frac{1}{p} = \frac{dx}{dy} = -\left(\frac{3a}{p^4} + \frac{2b}{p^3}\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore \quad p^3 = -\left(3a + 2bp\right)\frac{dp}{dy}$$

$$\therefore \quad \int dy = -\int \frac{(3a + 2bp)}{p^3}\, dp$$

அதாவது $y + C = \frac{3}{2}\frac{a}{p^2} + \frac{2b}{p}$

இங்கு $p = \frac{1}{t}$ என ஈடு செய்தால்,

$$x = at^3 + bt^2$$

$$y = \frac{3}{2}at^2 + 2bt - C$$

என $x$, $y$ இரண்டும், $t$ என்ற ஒரு மாறு ராசியின் சார்பாகக் கொடுக்கப்பட்டிருக்கின்றன. $t$-ஐ, நீக்கி $y = F(x)$ என அறிவது அரிதாகலின் விடப்பட்டது.

19·5 **கிளேராட் (Clairaut) அமைப்பு :**

$$y = px + f(p) \tag{1}$$

என்பது கிளேராட் என்பவரால் தீர்வுகாணப்பட்ட வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டமைப்பு. இதன் தீர்வு காணும் முறை பின் வருமாறு :

(1)-ன் இருபக்கங்களுக்கும் $x$ வகைக்கெழு காண,

$$p = \frac{dy}{dx} = p + x\frac{dp}{dx} + f^1(p)\frac{dp}{dx} \tag{2}$$

என்ற சமன்பாடு கிடைக்கிறது.

எனவே, $x\frac{dp}{dx} + f^1(p)\frac{dp}{dx} = 0$

அதாவது, $\frac{dp}{dx}[x + f^1(p)] = 0$

முதலாவதாக, $\frac{dp}{dx} = 0$

$\therefore \quad p = c$ (மாறிலி)

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = c$$

$$\therefore \quad y = cx + m.$$

இதையே, $y = cx + f(c)$ என எழுதுவதில் பொதுத்தன்மை கெடாது.

எனவே $y = px + f(p)$-ன் தீர்வு,
$y = cx + f(c)$ ஆகிறது (2)

இரண்டாவதாக,

$$x + f^1(p) = 0. \qquad (3)$$

(1)-க்கும் (3)-க்கும் இடையே, $p$ நீக்கப்பட்டால் கிடைக்கும், $x, y$ சார்புச் சமன்பாட்டில் ஒரு மாறிலியும் வர இடமில்லை. மாறிலியின்றிக்கிடைக்கும் இத்தீர்வு, தனிச்சிறப்புத் தீர்வு (Singular Solution) எனக் கூறப்படும்.

19.51 எடுத்துக்காட்டு :

தீர்வு காண்க : $y = px + (1 + p^2)^{1/2}$

இதன் ஒரு தீர்வு $y = cx + (1 + c^2)^{1/2}$ ஆகும்.

இரண்டாவதாக அமையும் தனிச்சிறப்புத் தீர்வையும் காண்போம்.

$$y = px + (1 + p^2)^{1/2} \qquad (1)$$

இருபக்கங்களின் $x$ வகைக்கெழு காண

$$p = \frac{dy}{dx} = p + x \frac{dp}{dx} + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} \frac{dp}{dx} = 0$$

$$\therefore x + \frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = 0 \qquad (2)$$

(1)-க்கும் (2)-க்கும் இடையே $p$ நீக்கப்பட வேண்டும்

(2)-லிருந்து $-\dfrac{p}{x} = (1 + p^2)^{1/2}$

$$\therefore p^2 = x^2 (1 + p^2).$$

$$\therefore p^2 (1 - x^2) = x^2$$

$$\therefore p = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\therefore (1 + p^2)^{\frac{1}{2}} = \left( 1 + \frac{x^2}{1 - x^2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

இவற்றை (1)-ல் ஈடு செய்தால்,

$$y = \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$= \frac{x^2 + 1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

என்ற தனிச் சிறப்புத் தீர்வு கிடைக்கும்.

பயிற்சிகள் 19 (சி).

தீர்வு காண்க:

1. $p(p-1)(p-x)(p-2y)=0.$
2. $x^2p^2+pxy-6y^2=0.$
3. $3x^4p^2-xp-y=0.$
4. $y^2p^2+3px-y=0.$
5. $p^2+2py\cot x-y^2=0.$
6. $xp^2+(y-x)p-y=0.$
7. $p(p-y)=x(x+y).$
8. $p^2xy+p(x^2+xy+y^2)+(x^2+xy)=0.$
9. $y=2px+p^4x^2.$
10. $x=yp+p^2.$
11. $p^2\cos^2 y+p\sin x\cos x\cos y-\sin y\cos^2 x=0.$
12. $p^2-xp+y=0.$
13. $xp^2-yp-y=3.$
14. $p^2-xp-y=0.$
15. $y=2p+\sqrt{1+p^2}.$
16. $(2x-b)p=y-ayp^2.$
17. $y^2\log y=pxy+p^2.$
18. $y=xp^2+p.$
19. $(y-px)(p-1)=p.$
20. $p^3-p(y+3)+x=0.$
21. $(y-xp)^2=a^2(1+p^2)$
22. $y=apx+bp^3$
23. $p^2y+2px-y=0$
24. $4(xp^2+yp)=y^4$
25. $p=\tan\left[x-\dfrac{p}{1+p^2}\right]$

பகுதி 20.

# வகைக் கெழுச் சமன்பாடுகள்

(தொடர்ச்சி)

## $n$ ம் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாடுகள்.

**20.1** $$\frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \ldots + P_n y = X \quad (1)$$

என்பது, ஒரு $n$-ம் வரிசை, முதற்படிச் சமன்பாட்டின் பொது அமைப்பாகும். இதில் $P_1, P_2, \ldots\ldots P_n$, $X$ யாவும் மாறிலிகள், அல்லது $x$-ன் சார்புகள்.

**20.2** முழுத் தீர்வு, துணைத்தீர்வு, சிறப்புத் தீர்வு :

(1)-ல் $y = u$ ஈடுசெய்தால், அச்சமன்பாடு பொருத்தமாகிறது எனக்கொள்வோம். அதாவது $y = u$ என்பது ஒரு தீர்வு எனக் கொள்வோம்.

(1)-ல் $y = Y + u$ ஈடுசெய்யின்,

$$\left( \frac{d^n Y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots P_n Y \right)$$

$$+ \left( \frac{d^n u}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots P_n u \right) = X$$

ஆனால் முதலில் கூறியபடி, $y = u$ என்பது ஒரு தீர்வெனக் கொண்டால்,

$$\frac{d^n u}{dx_n} + P_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots P_n u = X$$

$$\therefore \frac{d^n Y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} Y}{dx^{n-1}} + \ldots\ldots P_n Y = 0$$

என வருகிறது.

எனவே (1)-ன் தீர்வு காண, (2)-ன் தீர்வு என்ன, அல்லது Y எனக் கொண்டது என்ன என அறிய வேண்டும்.

ஆதலால், சமன்பாடு (2) ஒரு துணைச் சமன்பாடு எனப் படும்.

ஆகவே, (1)-ன் தீர்வு காண, Y என்பது யாது, *u* என்பது யாது, என இரண்டையும் அறிய வேண்டும்.

சமன்பாடு (2)-ல், $y = y_1$ என்ற சார்பை ஈடுசெய்தால், அச்சமன்பாட்டுக்கு பொருத்தமிருக்கிறது என முதலில் வைத்துக்கொள்வோம். அதாவது $y = y_1$ என்பது (2)-ன் ஒரு தீர்வு. அப்போது $y = y_1$ மட்டுமல்லாமல், $y = c_1 y_1$ ($c_1$ ஏதாமொருமாறிலி) என்பதும் ஒரு தீர்வாகப் பொருந்துமென நாம் காணலாம். ஏனெனில்,

$y = y_1$ பொருத்தமானல்,

$$\frac{d^n y_1}{d x^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{d x^{n-1}} + \ldots + P_n y_1 = 0 \tag{3}$$

என்பது பொருத்தமாகிறது.

$y_1$-க்குப் பதிலாக, $c_1 y_1$ ஈடுசெய்தால், இடது

$$\text{கைப்புறம்} = c_1 \left[ \frac{d^n y_1}{d x^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y_1}{dx^{n-1}} + \ldots P_n y_1 \right] \tag{4}$$

ஆகவே (3)-ன் படி (4) = 0 என்பது விளக்கம். எனவே, $y = y_1$ ஒரு பொருத்தமாக்கும் தீர்வானல், $y = c_1 y_1$ம் ஒரு பொருத்தமான தீர்வாகிறது என்பது விளக்கம்.

அதேபோல, $y = y_2$; $y = y_3$; ... $y = y_n$ என்பவை (2)-ன் தீர்வுகளாகப் பொருத்தமாயிருப்பின், $y = c_2 y_2$; $y = c_3 y_3$;... $y = c_n y_n$ யாவும் (2)-ன் தீர்வுகளாகப் பொருந்தும்.

$$\text{மேலும்,}\quad y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots c_n y_n \tag{5}$$

என்பதும் (2)-ன் தீர்வாகப் பொருந்தும் என்பதை எளிதில் காணலாம்.

மேலும் $y_1, y_2, \ldots y_n$ என்ற சார்புகள் ஒன்றுக்கொன்று தொடர்பற்றவையாயின்,

$$y = c_1, y_1 + c_2, y_2 + \ldots c_n y_n \tag{6}$$

என்பது (2)-ன் ஒரு பொதுத் தீர்வாகும். அத் தீர்வில் *n* மாறிலிகள் உள்ளன ; இதுவும் பொருத்தமே ; ஏனெனில், (2) ஒரு *n* வரிசைச் சமன்பாடு ; ஆகவே, அதன் தீர்வில் *n* மாறிலிகள் கட்டாயம் இருக்கவேண்டும்.

ஆகவே, $y = Y$ என்பது (2)-ன் பொதுத் தீர்வாகவும், $y = u$ என்பது (1)-ன் ஒரு சிறப்புத் தீர்வாகவும் இருப்பின்,

$$y = Y + u \tag{7}$$

என்பது (1)-ன் முழுத் தீர்வாகும்.

எனவே (1)-ன் முழுத் தீர்வில் இரண்டு பிரிவுகள் உள்ளன: ஒன்று, $y = Y$ என்ற பொதுத் தீர்வு; இரண்டு, $y = u$ என்ற சிறப்புத் தீர்வு. ஆகவே, முழுத் தீர்வு = பொதுத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு.

இதில் $Y$ என்பது துணைத் தீர்வெனவும், $u$ என்பது சிறப்புத் தீர்வெனவும் கூறப்படும்.

முழுத்தீர்வு = துணைத் தீர்வு + சிறப்புத் தீர்வு.

**20·3 செயலிகள் (operators) :**

சமன்பாடு (1)ஐ,

$$(D^n + P_1 D^{n-1} + \dots P_n)\, y = X.$$

என்று எழுதலாம்.

இங்கு $D^n$, $D^{n-1}$, .... D முதலியன, $y$ ஐப் பெருக்கும் கிணைகள் அல்ல; ஆனல் வகைக் கெழுச் செயலிகளாம்.

$Dy$ என்பதன் விளக்கம், D எனும் வகைக் கெழுச் செயலி, $y$ எனும் சார்பின் மேல் இயங்குகிறது: அதாவது $Dy = \dfrac{dy}{dx}$. அவ்வாறே $D^r y = \dfrac{d^r y}{dx^r}$

குறிப்பு.—பெருக்கலுக்கும் செயலி இயக்கத்திற்கும் உள்ள நுண்ணிய வேறுபாட்டை தெளிந்தறிதல் மிகவும் இன்றியமையாதது. D என்பதை முதல் வகைக் கெழுச் செயலி எனவும், பொதுவாக $D^r$ என்பதை $r$ (முறை) வகைக் கெழுச் செயலி எனவும் கொள்வோம். இச் செயலி Dக்கு தனித்த பொருள் ஏதுமில்லை. D ஒரு சார்பின் மேல் இயங்கும்போது தான், பொருள் பெறுகிறது.

**20·4** முதன்முதலாக,

$(D^n + P_1 D^{n-1} + \dots P_n)\, y = 0$ என்ற சமன்பாட்டில், $P_1, P_2, \dots P_n$ மாறிலிகளாக உள்ளபோது, அதன் தீர்வு காண்போம்.

தீர்வு காண் முறை :

சமன்பாட்டில், $y = e^{mx}$ என ஈடுசெய்தால், $(m^n + P_1 m^{n-1} + \ldots P_n) e^{mx} = 0$ எனக் கிடைக்கும். இங்கு $e^{mx} \neq 0$; எனவே $m^n + P_1 m^{n-1} + \ldots P_n = 0$ இது உதவிச் சமன்பாடு எனப்படும். இதற்கு $n$ தீர்வுகள் (இயல்புத் தீர்வுகள், கற்பனைத் தீர்வுகள் உட்பட) உண்டு. அவை $m_1, m_2, \ldots\ldots m_n$ எனவாயின்,

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots . C_n e^{m_n x}$$ என்பது தீர்வாகும்.

ஏனெனில்,

$$(D^n + P_1 D^{n-1} + \ldots P_n)\, C_r e^{m_r x}$$
$$= C_r e^{m_r x} (m_r{}^n + P_1 m_r{}^{n-1} + \ldots P_n)$$
$$= C_r e^{m_r x} \times 0$$
$$= 0.$$

**20·41 எடுத்துக் காட்டு :**

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 4 D - 5) y = 0$

உதவிச் சமன்பாடு $m^2 + 4 m - 5 = 0$.

இதன் தீர்வுகள், $m = 1, -5$

ஆகவே தீர்வு $y = c_1 e^x + c_2 e^{-5x}$.

மேலும், இச்சமன்பாட்டில், $x = 0$ ஆனல்,

$y = 7$; $\dfrac{dy}{dx} = 1$ எனவும் கட்டுப்பாடு இருக்குமானுல்

$c_1, c_2$ன் சிறப்பு மதிப்புக்களையும் அறியலாம்.

$x = 0$ ; $y = 7$ ஆனுல், $y = c_1 e^x + c_2 e^{5x}$ ல்

ஈடுசெய்யும்போது, $7 = c_1 + c_2$

$$\text{மேலும்} \quad \frac{dy}{dx} = c_1 e^x - 5 c_2 e^{-5x}$$

$x = 0$ ; $y = 1$ ஆனுல், $1 = c_1 - 5 c_2$

எனவே $c_1, c_2$ கண்டுபிடிக்க,

$$c_1 + c_2 = 7$$
$$c_1 - 5 c_2 = 1$$

என்ற இரண்டு சமன்பாடுகள் உள்ளன. இவைகளின் தீர்வு கண்டால், $c_1 = 6$ ; $c_2 = 1$ எனக்கிடைக்கும்.

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட கட்டுப்பாட்டின்படி,

$y = 6 e^x + e^{-5x}$ தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு (2)

தீர்வு காண்க : $(D^3 - 2D^2 - D + 2)y = 0$

உதவிச் சமன்பாடு $m^3 - 2m^2 - m + 2 = 0$

இதன் தீர்வுகள் $m = 1, -1, 2$

எனவே $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x}$ தீர்வாகும். இது மூன்றும் வரிசைச் சமன்பாடு ; எனவே மூன்று மாறிலிகள் தீர்வில் இருப்பது முறையாகும்.

**20·5 உதவிச் சமன்பாடு : தீர்வுகளின் தன்மை.**

உதவிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m_1, m_2, \ldots m_n$ ஆனால், $y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots C_n e^{m_n x}$ என்று தீர்வு கண்டோம். இங்கு $m_1, m_2, \ldots m_n$ என்பவை யாவும் இயல்புத் தீர்வுகளாகவே அமையும் என்று நினைத்தல் கூடாது. ஆனால் யாவும் இயல்புத் தீர்வுகளாகவே இருக்கலாம் ; அல்லது சில இயல்புத் தீர்வுகளாகவும், சில கற்பனைத் தீர்வுகளாகவும் இருக்கலாம்.

எடுத்துக்காட்டாக,

$$a m^2 + b m + c = 0$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் $m = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

இந்தத் தீர்வுகள்,

(1) இரண்டும் இயல்புத் தீர்வுகளாக இருக்கலாம் $(\alpha, \beta)$ ;

(2) இரண்டும் கற்பனைத் தீர்வுகளாக இருக்கலாம் ; $(\alpha + i\beta, \alpha - i\beta)$ ;

தீர்வுகளின் தன்மை $b^2 - 4ac$-ன் தன்மையையொட்டியிருக்குமென்பது நாமறிந்ததே.

தீர்வுகளின் தன்மைகள் :

| $(b^2 - 4ac)$-ன் தன்மை | | தீர்வுகளின் தன்மை |
|---|---|---|
| $>0$ கூட்டெண். | (i) சரியான இரு படி. | மெய்யெண்கள் ; வெவ்வேறு ; அளவுக்கிணங்கியவை. |
| | (ii) சரியான இரு படி யல்ல. | மெய்யெண்கள் ; வெவ்வேறு ; அளவுக்கிணங்காதவை. |
| $=0$ | (iii) | மெய்யெண்கள் ; சமமானவை ; அளவுக்கிணங்கியவை. |
| $<0$ குறையெண். | (iv) | கற்பனை எண்கள். |

நமது ஆராய்ச்சிக்கு

$(a\,D^2 + b\,D + c)\quad y = o$ என்ற இரு வரிசைச் சமன்பாட்டை எடுத்துக்கொண்டால் போதுமானது.

உதவிச் சமன்பாடு : $am^2 + bm + c = o$

இதன் தீர்வுகளின் தன்மை $(b^2 - 4\,ac)$-ன் தன்மையொட்டி மேலே (i) (ii) (iii) (iv) என வகைப்படுத்தப்பட்டிருக்கிறது.

**20·51** (i) மெய்யெண்கள், வெவ்வேறாய், அளவுக்கிணங்கிய்வாய் உள்ள $m_1$, $m_2$.

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு

$$y = C_1\, e^{m_1 x} + C_2\, e^{m_2 x} \qquad \text{(i)}$$

**20·52** (ii) மெய்யெண்கள், வெவ்வேறாய் அளவுக்கிணங்காத $p + \sqrt{q}$, $p - \sqrt{q}$ ($p, q$ ம் அளவுக்கிணங்கிய மெய்யெண்கள்).

வகைக்கெழுச் சமன்பாட்டின் தீர்வு,

$$y = c_1\, e^{(p + \sqrt{q})\, x} + c_2\, e^{(p - \sqrt{q})\, x}$$

$$= e^{px}\left[c_1\, e^{\sqrt{q}\, x} + c_2\, e^{-\sqrt{q}\, x}\right]$$

$$= e^{px}\left[\text{A} \cos h \sqrt{q}\, x + \text{B} \sin h \sqrt{q}\, x\right]. \qquad \text{(ii)}$$

என்று எழுதலாம்.

**20·53** (iii) மெய்யெண்கள், அளவுக்கிணங்கிய சமயெண்கள், $m_1, m_1$ என இருக்கட்டும். இதுவரை நாம் அறிந்தபடி, வகைக் கெழுச்சமன்பாட்டின் தீர்வு $y = c_1\, e^{m_1 x} + c_2\, e^{m_1 x}$

$$= (c_1 + c_2)\, e^{m_1 x}$$

$$= c\, e^{m_1 x}$$

என்று ஒரே ஒரு மாறிலி கொண்ட தீர்வு கிடைக்கும். ஆனல் இருவரிசைச் சமன்பாட்டுத் தீர்வில் இரண்டு மாறிலிகள் பொதுவாக இருக்கவேண்டும். ஆகவே, இக் குறைபாட்டை எப்படி நீக்குவது ?

இந்நிலையில் சமன்பாட்டை,

$a\,(D - m_1)\;(D - m_1)\; y = 0$ என எழுதுவோம்.

$a \neq 0$

ஆகவே $(D - m_1)\;(D - m_1)\; y = 0$

இங்கு $(D - m_1)\, y = z$ எனக்கொண்டால்

$(D - m_1)\, z = 0$

இதன் தீர்வு $z = c_1\, e^{m_1 x}$

எனவே $(D - m_1)\, y = C_1\, e^{m_1 x}$

அதாவது $\dfrac{dy}{dx} - m_1 y = C_1\, e^{m_1 x}$

இதன் தீர்வு $y e^{-m_1 x} = \int C_1 e^{-m_1 x}\, e^{-m_1 x}\, dx$

$$= (C_1 x + C_2)$$

$$\therefore\ y = (C_1 x + C_2)\, e^{m_1 x} \qquad \text{(iii)}$$

இங்கு இரு வரிசைச் சமன்பாட்டுத் தீர்வில் இருக்க வேண்டிய, இரண்டு மாறிலிகள் உள்ளன.

எனவே, $m_1$, $m_1$ என்ற இரு சமத் தீர்வுகள் வரும்போது,

$y = (C_1 x + C_2)\, e^{m_1 x}$ தீர்வாகும். இவ்வாறே, $m_1$, $m_1$, $m_1$ என்ற மூன்று தீர்வுகள் சமமாக வரும்போது,

$y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)\, e^{m_1 x}$ தீர்வாகும். பொதுவாக, $m_1$, $m_1$, $m_1$ ...என்று $r$ தீர்வுகள் சமமாக வரின்.

$y = (C_1 x^{r-1} + C_2 x^{r-2} + \ldots C_r)\, e^{m_1 x}$ தீர்வாகும். மற்றவை எப்போதும் போலவேயமையும்.

**20·54 (iv)** உதவிச் சமன்பாட்டுத் தீர்வுகள் கற்பனையெண்கள் $a + i\beta$, $a - i\beta$.

முன் நாம் அறிந்தபடி, தீர்வு,

$$y = C_1\, e^{(a + i\beta)\, x} + C_2\, e^{(a - i\beta)\, x}$$

$$= e^{a x}\left[C_1 e^{i\beta x} + C_2 e^{-i\beta x}\right]$$

$$= e^{a x}\left[A \cos\beta x + B \sin \beta x\right] \qquad \text{(iv)}$$

அல்லது $e^{a x} .\ A \cos(\beta x + \varepsilon)$. (iv)

**20.54 எடுத்துக்காட்டு (1)**

தீர்வு காண்க ; $(9 D^2 - 24 D + 16)\, y = 0$

$$9m^2 - 24m + 16 = 0$$

$$m = \frac{4}{3}\ ,\ \frac{4}{3}$$

$\therefore$ தீர்வு $y = (C_1 x + C_2)\, e^{\frac{4}{3} x}$.

எடுத்துக்காட்டு (2)

தீர்வு காண்க : $(D^3 - 3D^2 + 3D - 1)\,y = 0$

$$(m-1)^3 = 0$$
$$m = 1, 1, 1.$$

∴ தீர்வு $y = (C_1 x^2 + C_2 x + C_3)\,e^x.$

எடுத்துக்காட்டு (3)

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 4D + 8)\,y = 0$

$$m^2 + 4m + 8 = 0$$
$$m = -2 + 2i,\ -2 - 2i$$

தீர்வு, $y = e^{-2x}\,(A \cos 2x + B \sin 2x)$

$$= e^{-2x}\,A_1 \cos(2x + \varepsilon)$$

எடுத்துக்காட்டு (4)

தீர்வு காண்க : $(D^2 + a^2)\,y = 0$

$$m^2 + a^2 = 0$$
$$m = ai,\ -ai$$

தீர்வு, $y = A \cos ax + B \sin ax$

$$= C \cos(ax + \varepsilon).$$

எடுத்துக்காட்டு (5)

தீர்வு காண்க : $(2D - 1)(D - 1)^2 (D^2 + 4)\,y = 0$

$$2m - 1 = 0$$
$$m = \tfrac{1}{2}$$
$$(m-1)^2 = 0$$
$$m = 1, 1.$$
$$m^2 + 4 = 0$$
$$m = \pm 2i$$
$$\therefore\ m = \tfrac{1}{2}, 1, 1, 2i, -2i$$

தீர்வு $y = c_1 e^{\frac{1}{2}x} + (c_2 x + c_3)\,e^{x} + (c_4 \cos 2x + c_5 \sin 2x)$

20·6 *n* வரிசை ஒருபடிச் சமன்பாட்டில், வலதுபுறம் X என்பது *x*-ன் சார்புடைத்து. அதன் தீர்வுகாண் முறை :

$$(D^n + P_1 D^{n-1} + \dots + P_n)\,y = X\ [= f(x)] \qquad (1)$$

இதை சுருக்கமாக,

$$f(D)\,y = X \qquad (2)$$

என்று இனி தேவையான இடங்களில் சுருக்கமாக எழுதுவோம்.

குறியீட்டு முறையில்,

$$y = \frac{1}{f(D)} X \qquad (3)$$

என்று எழுதலாம்.

இதன் பொருள் என்னவெனில், $f(D)$ என்ற செயலி, $y$-ன் மேல் இயங்கினால் வரும் சார்பு $X$ என்பதாகும். (அதாவது $\frac{1}{f(D)} X$ என்பதின் பொருள், $X$ ஐ $f(D)$ ஆல் வகுத்துவரும் ஈவு அல்ல என்பதை ஞாபகத்திலிருத்த வேண்டும்.)

(3) சமன்பாட்டின் ஒரு சிறப்புத் தீர்வாகும். அது $X$-ஐ யொட்டியிருக்கும்.

$\frac{1}{f(D)}$ என்பது ஒரு தலைகீழ் மாற்றச் செயலியெனப்படும்.

20·7 முன்னர் நாம் கூறியபடி,

$f(D)\, y = X$ என்பதன் தீர்வு,

$$y = C_1 e^{m_1 x} + C_2 e^{m_2 x} + \ldots + C_n e^{m_n x} + \frac{1}{f(D)} X$$

$$= C_1 e^{m_1 x} + \ldots + C_n e^{m_n x} + F(x)$$

என்ற அமைப்பில் வரும்.

முதற்பகுதியான $\sum C_r e^{m_r x}$ என்பது

$f(D)\, y = o$-ன் தீர்வு.

இரண்டாம் பகுதியான $\frac{1}{f(D)} X = F(x)$ என்பது

$f(D)\, y = X$-ன் தீர்வு.

இரண்டின் கூட்டுத்தொகையே முழுத் தீர்வு எனப்படும்.

**20·8 சிறப்புத் தீர்வு காண்முறை :**

$X = e^{ax}$; $\sin ax$; $\cos ax$; $x^m$, $Ve^{ax}$ -என்ற அமைப்புகள்.

20.8 (1) $f(D)\, y = e^{ax}$-ன் முழுத்தீர்வு காணல்.

$f(D)\, y = o$-ன் தீர்வு முன் கூறிய முறையில் அறிய வேண்டும். அது

$f(D)\, y = e^{ax}$-ன் துணைத் தீர்வாகவிருக்கும்.

இப்போது $f(D)\, y = e^{ax}$-ன் சிறப்புத் தீர்வு காணல் வேண்டும்.

பின்வருவனவற்றைக் கவனிப்போம்.

$$De^{ax} = ae^{ax}$$
$$D^2e^{ax} = a^2e^{ax}$$
$$D^3e^{ax} = a^3e^{ax}$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$D^ne^{ax} = a^ne^{ax}$$

எனவே $f(D)\,e^{ax} = f(a)e^{ax}$ (1)

எடுத்துக்காட்டாக,

$$(D^3 - 3\,D^2 + D + 4)\;e^{ax} = (a^3 - 3a^2 + a + 4)\,e^{ax}.$$

இடதுபக்கத்தில் D-ம் அதன் படிகளும் செயலிகள். வலது பக்கத்தில் $a$-ம் அதன்படிகளும் பெருக்குச் சினைகள்.

மேலே, (1)-ஐ எடுத்துக்கொண்டால்,

$$f(D)\,e^{ax} = f(a)\,e^{ax}.$$

செயலிகள் இயக்கு முறையும், தலைகீழ் மாற்றுச் செயலிகள் தன்மையையும் உளத்திற்கொண்டு,

(1) ஐ $e^{ax} = \dfrac{1}{f(D)}\,f(a)e^{ax}$

என எழுதலாம். (இங்கு $\dfrac{1}{f(D)}$ ஒரு தலை கீழ்மாற்றுச் செயலியாகும்)

$f(a)$ என்பது ஒரு பெருக்கெண். ஆகவே

$$\frac{1}{f(a)}\,e^{ax} = \frac{1}{f(D)}\,e^{ax}$$

எனவே $f(D)\,y = e^{ax}$ என்ற சமன்பாட்டை

$y = \dfrac{1}{f(D)}\,e^{ax}$ என எழுதினுல்

$\dfrac{1}{f(D)}\,e^{ax} = \dfrac{1}{f(a)}\,e^{ax}$ என அறிகிறோம்.

ஆகவே $f(D)\,y = e^{ax}$ என்ற சமன்பாட்டிற்கு

$$y = \frac{1}{f(D)}\,e^{ax}$$

$= \dfrac{1}{f(a)}\,e^{ax}$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

இதுவே சிறப்புத் தீர்வாகும்.

முழுத் தீர்வு = துணைத்தீர்வு $+ \dfrac{1}{f(a)}\,e^{ax}$.

*20·811* இப்போது $f(a) = 0$ ஆனல் என்ன செய்வது? அந்த நிலையில் $y = \frac{1}{f(a)} e^{ax}$ என்ற முறை தவறி விடுகிறது. சற்று கூர்ந்து நோக்கின் $f(m) = 0$ என்ற சமன்பாட்டின் ஒரு தீர்வாக $\underline{a}$ இருந்தால் இந்த நிலை ஏற்படுகிறது என்று தெரிய வரும்.

அப்போது :

$$f(D) = (D - a)(D - m_2)(D - m_3) \ldots (D - m_n)$$

எனக்கொள்வோம்.

அங்கு

$$y = \frac{1}{f(D)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a) f_1(D)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a) f_1(a)} e^{ax}$$

என்று எழுதலாம்.

$$\therefore \quad (D - a)\, y = \frac{1}{f_1(a)} e^{ax}$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} - ay = \frac{1}{f_1(a)} e^{ax}$$

இதன் தீர்வு,

$$ye^{-ax} = \int \frac{e^{ax} \cdot e^{-ax}}{f_1(a)} dx$$

$$= \frac{x}{f_1(a)}$$

$$\therefore \ y = \frac{xe^{ax}}{f_1(a)} \qquad (2)$$

மேலும்

$f(D) = (D - a)^2 (D - m_3) \ldots . (D - m_n)$ என்று இருக்குமானல்,

$$y = \frac{1}{(D-a)^2 (D - m_3) \ldots (D - m_n)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a)^2 f(D)} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{(D-a)^2 f_2(a)} e^{ax}$$

$$\therefore (D-a)^2 y = \frac{1}{f_2(a)} e^{ax}$$

அதாவது $(D-a)(D-a)y = \frac{1}{f_2(a)} e^{ax}$

இதன் தீர்வு,

$$y = \frac{x^2}{2} \frac{e^{ax}}{f_2(a)} \tag{3}$$

எடுத்துக்காட்டுகள் :

தீர்வு காண்க :

(1) $(D^2 - 7D + 6)\, y = e^{-2x} + 5e^{3x}$

உதவிச் சமன்பாடு, $m^2 - 7m + 6 = 0$

$$\therefore m = 1, 6$$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x}$.

சிறப்புத் தீர்வு $y = \frac{e^{-2x}}{D^2 - 7D + 6} + \frac{5e^{3x}}{D^2 - 7D + 6}$.

$$= \frac{e^{-2x}}{(-2)^2 - 7(-2) + 6} + \frac{5e^{3x}}{(3)^2 - 7(3) + 6}$$

$$= \frac{e^{-2x}}{24} - \frac{5e^{3x}}{6}$$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{6x} + \frac{e^{-2x}}{24} - \frac{5e^{3x}}{6}$.

(2) $(D^2 - 5D + 4)\, y = 4e^{x} + e^{-3x}$.

உதவிச் சமன்பாடு $m^2 - 5m + 4 = 0$

$$\therefore m = 1, 4.$$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு $y = C_1 e^{x} + C_2 e^{4x}$.

சிறப்புத் தீர்வு $y = \frac{4e^{x}}{D^2 - 5D + 4} + \frac{e^{-3x}}{D^2 - 5D + 4}$

$$= \frac{4e^{x}}{0} + \frac{e^{-3x}}{28}$$

முதல் உறுப்பில் கீழெண் சுன்னமாவதால், இத்தீர்வு முறை அப்புகுதிக்குப் பயன்படாது.

ஆனால் அவ்வாரான நிலையில் எப்படி தீர்வு காண்பதென முன்னர் 20.811ல் குறிப்பிட்டுள்ளோம். அதன்படி,

$$z = \frac{4e^{x}}{D^2 - 5D + 4}$$

$$= \frac{4e^{x}}{(D-1)(D-4)}$$

$$= \frac{4e^{x}}{(D-1)(1-4)}$$

$$= -\frac{4}{3} \cdot \frac{e^{x}}{(D-1)}$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} - z = -\frac{4}{3}e^{x}$$

$$\therefore ze^{-x} = \int -\frac{4}{3} e^{x} \cdot e^{-x} dx$$

$$= -\frac{4}{3}x$$

$\therefore z = -\frac{4}{3}xe^{x}$ என்ற தீர்வு கிடைக்கும்.

ஆகவே சிறப்புத் தீர்வு $y = -\frac{4}{3}xe^{x} + \frac{e^{-3x}}{28}$

இதோடு துணைத் தீர்வைக் கூட்டி முழுத் தீர்வு எழுதலாம்.

(3) $(D^2 + 6D + 9)y = e^{-3x}$

உதவிச் சமன்பாடு $m^2 + 6m + 9 = 0$

$$\therefore m = -3, -3$$

$\therefore$ துணைத் தீர்வு $y = (C_1x + C_2)e^{-3x}$.

சிறப்புத் தீர்வு $y = \frac{e^{-3x}}{(D+3)(D+3)}$

D-க்கு பதிலாக — 3 ஈடு செய்தால், சுன்னம் கிடைக்கும்.

ஆகவே அம் முறை பயன்படாது போகிறது.

எனவே, $(D+3)(D+3)\,y = e^{-3x}$.

இதன் தீர்வு முன்னர்

குறிப்பிட்டபடி, $y = \dfrac{x^2}{2}\,e^{-3x}$

$\therefore$ முழுத் தீர்வு $y = (C_1 x + C_2)\,e^{-3x} + \dfrac{x^2}{2}\,e^{-3x}$.

## பயிற்சிகள் 20 (*a*)

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2 - 1)\,y = 0$
2. $(D^2 + 3\,D + 2)\,y = 0$
3. $(D^2 + D)\,y = 0$
4. $(D^2 + 2\,D + 1)\,y = 0$
5. $(D^3 + D^2 + D + 1)\,y = 0$
6. $(D^4 + D^3)\,y = 0$
7. $(2\,D^2 - 5\,D - 7)\,y = 0$
8. $(D^4 - 1)\,y = 0$
9. $(D^3 - 8)\,y = 0$
10. $(D^2 + 4\,m^2)\,y = 0$.

## பயிற்சிகள் 20 (*b*)

துணைத் தீர்வு, சிறப்புத் தீர்வு, முழுத் தீர்வு மூன்றும் காண்க :

1. $(D^2 + 3\,D - 4)\,y = e^{-2x}$
2. $(D^2 - 3\,D + 2)\,y = e^{5x}$
3. $(D^2 - 2\,KD + K^2)\,y = e^{x}$
4. $(D^2 - 7\,D + 6)\,y = e^{2x}$ (கட்டுப்பாடு : $x = 0;\ y = 0;\ \dfrac{dy}{dx} = 4$)
5. $(D^2 - 4)\,y = 12\cos h\,2x$
6. $(D^3 - 9\,D)\,y = 108\sin h\,3x$
7. $(D^2 - 4\,D + 4)\,y = 4e^{2x}$
8. $(D^2 + 4\,D)\,y = e^{x}\sin h\,3x$.

**20.82** $f(D)\, y = \cos ax$ அல்லது $\sin ax$.

இந்தச் சமன்பாட்டின் முழுத் தீர்வு காணல் :

பின்வருவனவற்றைக் கவனிப்போம்.

$$D \cos ax = -a \sin ax$$
$$D^2 \cos ax = -a^2 \cos ax$$
$$D^3 \cos ax = a^3 \sin ax$$
$$D^4 \cos ax = a^4 \cos ax = (-a^2)^2 \cos ax$$
$$D^5 \cos ax = -a^5 \sin ax$$
$$D^6 \cos ax = -a^6 \cos ax = (-a^2)^3 \cos ax$$
$$D^8 \cos ax = a^8 \cos ax = (-a^2)^4 \cos ax$$
$$D^{2n} \cos ax = (-a^2)^n \cos ax.$$

அவ்வாறே,

$D^{2n} \sin ax = (-a^2)^n \sin ax$ என்பதையும் கண்டறியலாம்.

இதனால்,

$$f(D^2) \cos ax = f(-a^2) \cos ax \qquad (1)$$
$$f(D^2) \sin ax = f(-a^2) \sin ax \qquad (2)$$

என்பது விளக்கமாகும்.

மேலே, *(1)*ஐ எடுத்துக்கொண்டால்,

$$f(D^2) \cos ax = f(-a^2) \cos ax$$

தலைகீழ் மாற்றுச் செயலிப்படி,

$$\cos ax = \frac{1}{f(D^2)} f(-a^2) \cos ax$$

அதாவது $\dfrac{1}{f(-a^2)} \cos ax = \dfrac{1}{f(D^2)} \cos ax.$

எனவே,

$$\frac{1}{f(D^2)} \cos ax = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax$$

அவ்வாறே,

$$\frac{1}{f(D^2)} \sin ax = \frac{1}{f(-a^2)} \sin ax$$

எடுத்துக்காட்டு *(1)* :

**தீர்வு காண்க** : $(D^4 - 3D^2 + 2)\, y = \cos 4x + \sin 2x.$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு } y = \frac{\cos 4x}{D^4 - 3D^2 + 2} + \frac{\sin 2x}{D^4 - 3D^2 + 2}$$

$$= \frac{\cos 4x}{(-16)^2 - 3(-16) + 2} + \frac{\sin 2x}{(-4)^2 - 3(-4) + 2}$$

$$= \frac{\cos 4x}{306} + \frac{\sin 2x}{30}.$$

இதோடு துணைத் தீர்வைக் கூட்டினால், முழுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு (2) :

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 4D - 5)\, y = \cos 2x - \sin 3x$

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு } y = \frac{\cos 2x}{D^2 + 4D - 5} - \frac{\sin 3x}{D^2 + 4D - 5}$$

இங்கு $D^2$ மட்டுமல்லாமல் D-ம் இருக்கிறது. ஆகவே, D இல்லாமலுள்ள ஒரு செயலியாக மாற்றித் தீர்வு காணவேண்டும்.

$$\frac{\cos 2x}{D^2 + 4D - 5} = \frac{(D^2 - 4D - 5)\cos 2x}{(D^2 + 4D - 5)(D^2 - 4D - 5)}$$

$$= \frac{(D^2 - 4D - 5)(\cos 2x)}{(D^2 - 5)^2 - 16D^2.}$$

$$= (D^2 - 4D - 5)\frac{\cos 2x}{(-4-5)^2 - 16(-4)}$$

$$= \frac{(D^2 - 4D - 5)\cos 2x}{145}$$

$$= \frac{-4\cos 2x + 8\sin 2x - 5\cos 2x}{145}$$

$$= \frac{8\sin 2x - 9\cos 2x}{145}$$

அவ்வாறே,

$$\frac{\sin 3x}{D^2 + 4D - 5} = \frac{(D^2 - 4D - 5)\sin 3x}{(D^2 - 4D - 5)(D^2 + 4D - 5)}$$

$$= \frac{(D^2 - 4D - 5)\sin 3x}{(D^2 - 5)^2 - 16D^2}$$

$$= \frac{(D^2 - 4D - 5)\sin 3x}{(-9-5)^2 - 16(-9)}$$

$$= \frac{-9\sin 3x - 12\cos 3x - 5\sin 3x}{340}$$

$$= \frac{-(14\sin 3x + 12\cos 3x)}{340}$$

ஆகவே, கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டின் சிறப்புத் தீர்வு

$$= \frac{8\sin 2x - 9\cos 2x}{145} + \frac{14\sin 3x + 12\cos 3x}{340}$$

இதைத் துணைத் தீர்வோடு கூட்டினால், முழுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

20·821 மற்றொரு முறை :

$$f(D)\, y = \cos ax = \frac{e^{iax} + e^{-iax}}{2}$$

என்ற சமன்பாடு கொடுக்கப்பட்டால், அதற்கு உதவும் சமன்பாடாக

$$f(D)\, y = \sin ax = \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{2i}$$

என்ற சமன்பாட்டையும் எடுத்துக்கொள்வோம்.

அப்போது $y = \dfrac{e^{iax} + e^{-iax}}{2f(D)} = u$ எனக் கொள்வோம்.

உதவியாகக் கொண்ட சமன்பாட்டில்,

$$y = \frac{e^{iax} - e^{iax}}{2if(D)} = v \quad \text{எனக் கொள்வோம்.}$$

$$u + iv = \frac{e^{iax}}{f(D)}$$

இங்கு மெய்ப் பகுதியான $u = \dfrac{1}{f(D)} \cos ax$

கற்பனைப் பகுதியான $v = \dfrac{1}{f(D)} \sin ax.$

$$u + iv = \frac{e^{iax}}{f(D)}$$

$$= \frac{e^{iax}}{f(ia)}$$

வலது பக்கத்தை மெய்ப் பகுதியாகவும் கற்பனைப் பகுதியாகவும் பிரித்து எழுதினல்,

மெய்ப்பகுதி $u = \dfrac{1}{f(D)} \cos ax$

கற்பனைப் பகுதி $iv = \dfrac{i}{f(D)} \sin ax.$

எனவே, $v = \dfrac{1}{f(D)} \sin ax$

என்ற முடிவுகள் கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்வு காண்க : $(2D^2 - 3D + 1)\, y = \cos 3x.$

$u = \dfrac{\cos 3x}{2D^2 - 3D + 1}$ எனக் கொள்க.

$v = \dfrac{\sin 3x}{2D^2 - 3D + 1}$ எனக் கொள்க.

$$u + iv = \frac{\cos 3x + i \sin 3x}{2D^2 - 3D + 1}$$

$$= \frac{e^{3ix}}{2D^2 - 3D + 1}$$

$$= \frac{e^{3ix}}{2(-9) - 9i + 1}$$

$$= \frac{\cos 3x + i \sin 3x}{-17 - 9i}$$

இதை மெய், கற்பனைப் பகுதியாகப் பிரித்து எழுதினால், $u$, $v$ கிடைக்கும்.

$$u + iv = \frac{(\cos 3x + i \sin 3x)(17 - 9i)}{-(17 + 9i)(17 - 9i)}$$

$$= \frac{(17 \cos 3x + 9 \sin 3x) + i(17 \sin 3x - 9 \cos 3x)}{-[(17)^2 - 81i^2]}$$

$$= -\frac{1}{370}\Big[(17 \cos 3x + 9 \sin 3x) + i(17 \sin 3x - 9 \cos 3x)\Big]$$

$$u = \frac{\cos 3x}{2D^2 - 3D + 1} = -\frac{1}{370}\Big[17 \cos 3x + 9 \sin 3x\Big]$$

$$v = \frac{\sin 3x}{2D^2 - 3D + 1} = -\frac{1}{370}\Big[17 \sin 3x - 9 \cos 3x\Big]$$

**20.8211 இம் முறை தவறும் நிலை :**

$f(-a^2) = 0$ ஆகிவிட்டால்,

$$y = \frac{1}{f(-a^2)} \cos ax = \frac{1}{0} \cos ax \text{ என்று வரும்.}$$

அப்போது $f(D^2)\, y = \cos ax$-ன் சிறப்புத் தீர்வு என்ன ?

$(D^2 + a^2)\, y = \cos ax$ அல்லது $\sin ax$.

$$u = \frac{\cos ax}{D^2 + a^2}$$

$$v = \frac{\sin ax}{D^2 + a^2}$$

$$z = u + iv = \frac{\cos ax + i \sin ax}{D^2 + a^2}$$

$$= \frac{e^{aix}}{(D + ai)(D - ai)}$$

$$\therefore\ z = \frac{e^{aix}}{2ai\,(D - ai)}$$

$$(D - ai)\, z = \frac{e^{aix}}{2ai}$$

$$\frac{dz}{dx} - iaz = \frac{e^{aix}}{2ai}$$

$$\therefore \; ze^{-iax} = \int \frac{e^{aix}\, e^{-iax}}{2\,ai}\, dx$$

$$= \frac{x}{2\,ai}$$

$$\therefore \; z = \frac{xe^{iax}}{2\,ai}$$

$$\therefore \; u + iv = \frac{x\,(\cos ax + i \sin ax)}{2\,ai}$$

$$\therefore \; 2\,aiu - 2\,av = x \cos ax + ix \sin ax.$$

$$\therefore \; u = \frac{x}{2a} \sin ax.$$

$$v = \frac{-x}{2a} \cos ax$$

$$\therefore \; \frac{1}{D^2 + a^2} \cos ax = \frac{x}{2a} \sin ax.$$

$$\frac{1}{D^2 + a^2} \sin ax = \frac{-x}{2a} \cos ax.$$

எடுத்துக்காட்டு :

$$(D^2 + 9)\; y = \cos 3x.$$

$$y = \frac{\cos 3x}{D^2 + 9}$$

முன்காட்டிய முறைப்படி,

$$y = \frac{x}{2 \times 3} \sin 3x$$

$$= \frac{x}{6} \sin 3x$$ சிறப்புத் தீர்வு.

## பயிற்சிகள் 20 (c)

தீர்வு காண்க:

1. $(D^2 + 2D + 5)y = 85 \cos 2x$.

2. $(D^2 + 4D + 13)y = 80 \cos 3x$.

3. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 2K \dfrac{dx}{dt} + p^2 x = \cos pt. \left(p \gtreqless K\right)$

4. $(D^2 - 4D + 1)y = a \sin 2x$.

5. $(D^2 + 9)y = \cos 2x + \sin 2x$.

6. $(D^2 - 4)y = 4 \cos 2x$.

7. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + n^2 x = n^2 a \sin cot.$

8. $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 9x = 4 \cos \left(t + \dfrac{\pi}{3}\right)$

$\left[\text{கட்டுப்பாடு}: \begin{array}{l} x = 0;\ t = 0 \\ x = 2;\ t = \dfrac{\pi}{6} \end{array}\right].$

9. $t = 0$ ஆனால்; $y = 0, \dfrac{dy}{dt} = 0$ என்ற கட்டுப்பாட்டில்

$\dfrac{d^2 x}{dt^2} + 4y = A \sin pt$ என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு,

(1) $p \neq 2$ ஆனால் $y(4 - p^2) = A \left(\sin pt - \dfrac{1}{2p} \sin 2t\right)$

எனவும்,

(2) $p = 2$ ஆனால் $8y = A (\sin 2t - 2t \cos 2t)$ எனவும் நிறுவுக.

10. $(D^2 + 4a^2)y = \cos 2ax$.

11. $(D^2 + 16)y = \sin 4x$.

12. $(D^2 + 1)y = 2 \sin x + 3 \cos x$.

**20.83** $X = x^m$ ஆனல் $f(D) = X$-ன் தீர்வு காணும் முறை:

$f(D)\, y = x^m$ தீர்வு காண்க.

$$y = \frac{1}{f(D)} x^m$$

**20·831** *எடுத்துக்காட்டு (1) :*

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 2D - 3)\, y = 4x^2$

$$\therefore \quad y = \frac{4x^2}{D^2 + 2D - 3}$$

$$= \frac{4x^2}{-3\left(1 - \frac{2}{3}D + \frac{D^2}{3}\right)}$$

$$= \frac{-4x^2}{3}\left(1 - \frac{2}{3}D + \frac{D^2}{3}\right)^{-1}$$

$$= \frac{-4x^2}{3}\left(1 + \frac{2}{3}D + \frac{D^2}{3} + \frac{2}{3}D + \frac{D^2}{3}^2 \cdots\right)$$

என்று ஈருறுப்புச் சேர்க்கை (அல்லது பல்லுறுப்புச் சேர்க்கைத்) தேற்றப்படி விரித்தெழுதித் தீர்வு காண வேண்டும்.

$$\therefore y = \frac{-4x^2}{3} + \frac{2}{3}D\left(-\frac{4x^2}{3}\right) - \frac{D^2}{3}\left(\frac{4x^2}{3}\right)\frac{4}{9}D^2\left(\frac{4x^2}{3}\right)$$

இங்கு விரித்தெழுதலை, $D^2$-க்கு மேற்பட்ட படிகளுக்கு மேல் கொண்டுபோகத் தேவையில்லை.

$$\therefore y = \frac{-4}{3}\left(x^2 + \frac{4}{3}x + \frac{14}{9}\right)$$

இது சிறப்புத் தீர்வாகும்.

*எடுத்துக்காட்டு (2) :*

தீர்வு காண்க : $\dfrac{d^3y}{dx^3} + 8y = x^4 + 2x + 1$

$$y = \frac{x^4 + 2x + 1}{D^3 + 8}$$

$$= \frac{x^4 + 2x + 1}{8\left(1 + \frac{D^3}{8}\right)}$$

$$= \frac{1}{8}\left(1+\frac{D^3}{8}\right)^{-1} \left(x^4+2x+1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(1-\frac{D^3}{8}\ldots\ldots\right) \left(x^4+2x+1\right)$$

இங்கு $D^3$ வரை விரிவு போதுமானது.

$$\therefore y = \frac{1}{8}\left(x^4+2x+1\right)-\frac{1}{64}D^3\left(x^4+2x+1\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x^4+2x+1\right)-\frac{1}{64}\left(4\cdot3\cdot2\cdot x\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(x^4-x+1\right)$$ சிறப்புத் தீர்வாகும்.

எடுத்துக்காட்டு (3):

தீர்வு காண்க: $(D^3+D)\,y = 4x^2$

உதவிச் சமன்பாடு $m^3+m=0$

$m=0,\ m=\pm i$

$\therefore$ துணைத் தேர்வு $= C + A\cos x + B\sin x$.

சிறப்புத் தீர்வு $y = \dfrac{4x^2}{D(D^2+1)}$

$$\therefore Dy = (1+D^2)^{-1}\,4x^2$$

$$= (1-D^2\ldots)\,4x^2$$

$$= 4x^2 - 8$$

$$\therefore y = \frac{4x^3}{3} - 8x$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு $y = C + A\cos x + B\sin x + \dfrac{4x^3}{3} - 8x$

## பயிற்சிகள் 20 (d)

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2+1)\,y = x^4$
2. $(D^2+D+1)\,y = x^2$
3. $\dfrac{d^2x}{dt^2} - \dfrac{dx}{dt} = 5t+2$
4. $(D^3+4D)\,y = 48x^2$
5. $(D^4-4D^2)\,y = 96x^2$

20.84 $X = e^{ax} V$ என்ற அமைப்பு . V என்பது $x$-ன் ஒருசார்பாகும்.

$$D(e^{ax} V) = ae^{ax} V + e^{ax} DV$$
$$= e^{ax} (D + a) V$$
$$D^2 (e^{ax} V) = ae^{ax} (D + a) V + e^{ax} (D^2 + a D) V$$
$$= e^{ax} (D + a)^2 V \cdot$$

பொதுவாக $D^n (e^{ax} V) = e^{ax} (D + a)^n V \cdot$

$\therefore \quad f(D) [e^{ax} V] = e^{ax} f(D + a) V$ என்பது வெள்ளிடை. (1)

இப்போது $f(D + a) V = V_1$ எனக் கொள்வோம்.

அப்போது $V = \dfrac{1}{f(D + a)} V_1$ .

இங்கு $V_1$ ஓர் $x$-ன் சார்பாக இருக்கும் ; ஏனெனில், V ஓர் $x$-ன் சார்பு.

இந்த V-ன் மதிப்பை (1)-ல் ஈடுசெய்தால்,

$$f(D) [e^{ax} V] = e^{ax} V_1$$

அதாவது, $f(D) \left[e^{ax} \cdot \dfrac{V_1}{f(D + a)}\right] = e^{ax} V_1 \cdot$

இரு பக்கங்களையும் $\dfrac{1}{f(D)}$ என்ற தலைகீழ்ச் செயலியால் இயக்கினால்,

$$\frac{1}{f(D)} f(D) \left[e^{ax} \cdot \frac{V_1}{f(D + a)}\right] = \frac{1}{f(D)} e^{ax} V_1 .$$

$$\therefore \frac{e^{ax} V_1}{f(D+a)} = \frac{1}{f(D)} e^{ax} V_1 \cdot$$

எனவே, பொதுவாக

$$\frac{1}{f(D)} e^{ax} V = e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V$$

என்ற உண்மை கிடைக்கும்.

இப்போது $f(D) y = e^{ax} V$ ஆனால்,

$$\text{சிறப்புத் தீர்வு } y = \frac{1}{f(D)} e^{ax} V$$
$$= e^{ax} \frac{1}{f(D+a)} V \text{ ஆகும்.}$$

இதைப் பயன்படுத்தி $y$ காணலாம்.

எடுத்துக்காட்டு :

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 3D + 2)\, y = e^x \sin x$

$$y = \frac{1}{(D^2 + 3D + 2)}\, e^x \sin x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{(D+1)^2+3(D+1)+2} \cdot \sin x$$

$$= e^x \cdot \frac{1}{D^2+5D+6} \sin x$$

$$= e^x \frac{(\sin x - \cos x)}{10}$$ சிறப்புத் தீர்வு.

## பயிற்சிகள் 20 (e)

தீர்வு காண்க :

1. $(D^2+2)\, y = x^2 e^{3x} + e^x \cos 2x$
2. $(D^2 - 5D + 6)\, y = x^2 e^x$
3. $(D^2 - 4D + 3)\, y = e^{-x} \sin x$
4. $(D^2 + D - 2)\, y = 2e^x (3x + 1)$
5. $(D^2 - 4D + 3)\, y = e^{2x} . x^2.$

*20.85* $X = x V$ ; ($V$ ஓர் $x$-ன் சார்பு).

$D (x V) = x DV + V$

$D^2 (x V) = x D^2 V + 2 DV$

$D^3 (x V) = x D^3 V + 3 D^2 V$

பொதுவாக $D^n (x V) = x D^n V + n D^{n-1} V$

$$= x D^n V + \left(\frac{d}{d D} \cdot D^n\right) V$$

ஆகவே,

$$f (D) (x V) = x f (D) V + \left[\frac{d}{d D} f (D)\right] V$$

$$= x f (D) V + f^1 (D) V. \qquad (1)$$

இங்கு $\frac{1}{f(D)}$ என்ற தலைகீழ் மாற்றுச் செயலியைப் பயன் படுத்தி இயக்கினல், தீர்வு காணலாம்.

*(1)*-ல் $f(D)\,V = V_1$ எனக் கொள்வோம். $V, V_1$ இரண்டும் $x$–ன் சார்புகளாகும்.

$$\therefore\ V = \frac{1}{f(D)} V_1.$$

இந்த மதிப்பை *(1)*-ல் ஈடு செய்தால்,

$$f(D)\left[x \cdot \frac{1}{f(D)} V\right] = x V_1 + \frac{f^1(D)}{f(D)} V_1 \qquad (2)$$

இப்போது, இரு பக்கங்களையும் $\frac{1}{f(D)}$ என்ற தலைகீழ் மாற்றுச் செயலி கொண்டு இயக்கினால்,

$$\frac{1}{f(D)}\, f(D)\left[x \cdot \frac{1}{f(D)} V_1\right] = \frac{1}{f(D)}\, x V_1 + \frac{1}{f(D)} \cdot \frac{f^1(D)}{f(D)} V_1 \qquad (3)$$

$$\therefore\ \frac{1}{f(D)}\, x V_1 = x \cdot \frac{1}{f(D)} V_1 - \frac{1}{f(D)} \cdot \frac{f^1(D)}{f(D)} V_1$$

$$= \left[x - \frac{f^1(D)}{f(D)}\right] \frac{1}{f(D)} V_1 .$$

குறிப்பு.—இம் முறையைப் படிப்படியாக, $x^r V$ என்ற சார்புக்கும் பயன்படுத்தலாம்.

எடுத்துக்காட்டு (1) :

தீர்வு காண்க : $(D^2 + 1)\, y = xe^{3x}$.

$$y = \frac{1}{D^2+1}(xe^{3x})$$

$$= \left(x - \frac{2D}{D^2+1}\right)\frac{1}{D^2+1} e^{3x}$$

$$= \left(x - \frac{2D}{D^2+1}\right)\frac{e^{3x}}{10}$$

$$= \frac{xe^{3x}}{10} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3e^{3x}}{9+1}$$

$$= \frac{xe^{3x}}{10} - \frac{3e^{3x}}{50}$$ சிறப்புத் தீர்வு.

எடுத்துக்காட்டு *(2)* :

தீர்வு காண்க : $(D^2 - 1)\, y = x \sin x$

$$y = \frac{1}{D^2-1}\, x \sin x$$

$$= \left(x - \frac{2D}{D^2-1}\right)\frac{1}{D^2-1} \cdot \sin x$$

$$= \left(x - \frac{2D}{D^2 - 1}\right) \frac{\sin x}{(-2)}$$

$$= \frac{-x \sin x}{\lfloor 2} + \frac{2}{D^2 - 1} \sin x$$

$$= \frac{-x \sin x}{2} + \frac{\cos x}{-1-1}$$

$$= \frac{-x \sin x}{2} - \frac{\cos x}{2}$$

$= \dfrac{-1}{2} (x \sin x + \cos x)$ என்பது சிறப்புத் தீர்வு.

### பயிற்சிகள் 20 (f)

1. $(D^2 + 4)\, y = x \sin x$
2. $(D^2 + 1)\, y = 4x \sin x$
3. $(D^2 + 4)\, y = 96x^2 \cos 2x$
4. $(D^2 + 6D + 18)\, y = 108\, x^2 e^{-3x} \cos 3x$
5. $(D^2 - 1)\, y = x^2 \sin 3x$.

பகுதி 21

# வகைக்கெழுச் சமன்பாடுகள்—(தொடர்ச்சி).

**சம ஒருபடிச் சமன்பாடுகள்**

$$x^n \frac{d^ny}{dx^n} + p_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}x \frac{dy}{dx} + p_n y = X \quad (1)$$

என்பது சம ஒருபடிச் சமன்பாட்டமைப்பாகும். இங்கு $p_1, p_2, \ldots$ மாறிலிகள் ; X ஒரு $x$-ன் சார்பு.

முறை : $z = \log_e^x$ அல்லது $x = e^z$ என்று ஈடுசெய்து, இதை மாறிலிக் கெழுக்கள் மட்டுமே கொண்ட ஓர் சமன்பாடாக்கித் தீர்வு காணலாம். பின்னர் $x = e^z$ என்று ஈடுசெய்யலாம்.

$Z = \log_e^x$ எனக் கொள்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \frac{dy}{dz}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dz^2} - \frac{dy}{dz}\right)$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{x^3}\left(\frac{d^3y}{dz^3} - 3\frac{d^2y}{dz^2} + 2\frac{dy}{dz}\right)$$

— — — — — — — — —

— — — — — — — — —

பொதுவாக

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{1}{x^n}\left[\frac{d^n y}{dz^n} - \frac{n(n-1)}{2}\frac{d^{n-1}y}{dz^{n-1}} + \dots\dots + (-1)^{n-1}(n-1)!\frac{dy}{dz}\right]$$

என்பதை நிறுவலாம்.

இங்கு $\frac{d}{dz}$-க்குப் பதிலாக $\theta$ என்ற செயலியைக் கையாண்டால்,

$$x\,D\,y = \theta\,y$$

$$x^2 D^2 y = \theta(\theta-1)\,y$$

$$x^3 D^3 y = \theta(\theta-1)(\theta-2)\,y.$$

— — — — — —.

$$x^n D^n y = \theta(\theta-1)(\theta-2)\dots(\theta-n+1)\,y.$$

ஆகவே கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு *(1)*-ல் $z = \log x$ என்று ஈடு செய்தால், அச் சமன்பாடு *(1)* பின்வரும் உருக் கொள்ளுகிறது :

$$[\theta(\theta-1)\dots(\theta-n+1) + p_1\theta(\theta-1)\dots(\theta-n+2)\dots + p_{n-1}\theta + p_n]\,y$$

$$= Z \qquad (4)$$

இங்கு Z என்பது $z$-ன் சார்பாக இருக்கும்.

*(4)* என்ற சமன்பாட்டைச் சுருக்கி எழுதினால்,

$(\theta^n + P_1\theta^{n-1} + \dots + P_n)\,y = Z$ என்ற அமைப்பில் வரும். இங்கு $P_1, P_2, \dots P_n$ மாறிலிகள். முன் பகுதி 20-ல் கூறிய முறைகள் கொண்டு இதன் துணைத்தீர்வு, சிறப்புத்தீர்வு, முழுத்தீர்வு யாவும் அறியலாம்.

உதவிச் சமன்பாடு $m^n + P_1 m^{n-1} + \dots + P_n = 0$ எனக் கிடைக்கும். இதன் தீர்வுகள் $m_1, m_2, \dots m_n$ என இருக்கட்டும்.

∴ துணைத்தீர்வு

$$Y_c = C_1 e^{m_1 z} + C_2 e^{m_2 z} + \ldots + C_n e^{m_n z}$$

$$= C_1 x^{m_1} + C_2 x^{m_2} + \ldots C_n x^{m_n}$$

ஏனெனில், $e^{m_r z} = e^{m_r \log x} = x^{m_r}$ ஆகும்.

உதவிச் சமன்பாட்டின் தீர்வுகள் சில சமமாகவும், சில கற்பனை எண்களாகவும் இருப்பின், துணைத் தேர்வில் உரிய மாற்றங்கள் செய்யவேண்டும்.

சிறப்புத் தீர்வு :

$$f(\theta)\, y = Z$$

$$\therefore \quad y = \frac{1}{f(\theta)} Z$$

இங்கு தீர்வு கண்டபின் $z = \log x$ என ஈடு செய்யின், கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாடு (1)-க்குரிய சிறப்புத் தீர்வும் கிடைக்கும். துணைத் தீர்வையும் சிறப்புத் தீர்வையும் கூட்ட முழுத் தீர்வு கிடைக்கும்.

எடுத்துக்காட்டு (1) :

தீர்வு காண்க :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 3x \frac{dy}{dx} + 4y = \log_e x$$

$z = \log_e x$ என ஈடுசெய்ய,

$$\left[ \theta(\theta - 1) - 3\theta + 4 \right] y = z$$

$$\therefore \quad (\theta^2 - 4\theta + 4)\, y = z.$$

துணைத்தீர்வு காண,

$$m^2 - 4m + 4 = 0$$

$$m = 2, 2$$

$$\therefore \quad y = (c_1 + c_2 z)\, e^{2z}$$

$$= (c_1 + c_2 \log x)\, x^2 \text{ — துணைத்தீர்வு.}$$

சிறப்புத் தீர்வு $y = \dfrac{z}{\theta^2 - 4\theta + 4}$

$$= \frac{z}{4\left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^2}$$

$$= \left(1 - \frac{\theta}{2}\right)^{-2} \frac{z}{4}$$

$$= (1 + \theta \ldots) \frac{z}{4}$$

$$= \frac{z}{4} + \frac{1}{4}$$

$$= \frac{\log x + 1}{4}$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு $y = (c_1 + c_2 \log x)\, x^2 + \dfrac{\log x + 1}{4}$.

எடுத்துக்காட்டு (2) :

தீர்வு காண்க :

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 5x \frac{dy}{dx} + 4y = x^4$$

$z = \log_e x$ என ஈடுசெய்து $\theta \equiv x \dfrac{d}{dx}$ எனக் கொள்க.

$$\therefore \left[\theta(\theta - 1) + 5\theta + 4\right] y = e^{4z}$$

$$\therefore (\theta^2 + 4\theta + 4)\, y = e^{4z}$$

துணைத் தீர்வு : $y = (c_1 + c_2 z)\ e^{-2z}$

$$= \frac{(c_1 + c_2 \log x)}{x^2}$$

சிறப்புத் தீர்வு : $y = \dfrac{e^{4z}}{\theta^2 + 4\theta + 4}$

$$= \frac{e^{4z}}{36} = \frac{x^4}{36}$$

$\therefore$ முழுத்தீர்வு $y = \dfrac{(c_1 + c_2 \log x)}{x^2} + \dfrac{x^4}{36}$.

குறிப்பு.—வலது கைப்புறம் $x^m$ ஆனால், சிறப்புத் தேர்வு காண ஓர் வாய்பாடு:

$\theta \equiv x \dfrac{d}{dx}$ எனக் கொண்டால்,

$\dfrac{1}{f(\theta)} x^m = \dfrac{1}{f(m)} x^m$ என நிறுவலாம்.

தெரிப்பு : $\left(x \dfrac{d}{dx}\right) x^m = m x^m$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^2 x^m = \left(x \frac{d}{dx}\right) m x^m$$

$$= m^2 x^m$$

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^3 x^m = \left(x \frac{d}{dx}\right) m^2 x^m$$

$$= m^3 x^m$$

அவ்வாறே,

$r$ ஒரு கூட்டு முழு எண் ஆனால்,

$$\left(x \frac{d}{dx}\right)^r x^m = m^r x^m$$

$$\therefore \quad f(\theta)\ x^m = f(m)\ x^m$$

இரு பக்கங்களையும் $\frac{1}{f(\theta)}$ என்ற தலைகீழ் மாற்றுச் செயலியால் இயக்கினால்,

$$\frac{1}{f(\theta)} f(\theta)\, x^m = \frac{1}{f(\theta)} f(m)\, x^m$$

$$\therefore \quad \frac{1}{f(\theta)} x^m = \frac{1}{f(m)} x^m.$$

எடுத்துக்காட்டு *(3)* :

தீர்வு காண்க :

$$(5+2x)^2 \frac{d^2y}{dx^2} - 6(5+2x)\frac{dy}{dx} + 8y = 0$$

$u = 5+2x$ எனக் கொள்க.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

$$= 2\frac{dy}{du}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(2\frac{dy}{du}\right)$$

$$= 2\frac{d}{du}\left(\frac{dy}{du}\right)\frac{du}{dx}$$

$$= 4\frac{d^2y}{du^2}$$

∴ சமன்பாடு,

$$4u^2\frac{d^2y}{du^2} - 6 \cdot 2 \cdot u\frac{dy}{du} + 8y = 0$$

அதாவது, $u^2 \frac{d^2 y}{du^2} - 3u \frac{dy}{du} + 2y = 0.$

∴ $z = \log u$ எனக் கொண்டு $\theta \equiv \left( u \frac{d}{du} \right)$ என ஈடு செய்தால், சமன்பாடு

$$\left[ \theta(\theta - 1) - 3\theta + 2 \right] y = 0$$ என மாறும்.

அதாவது, $(\theta^2 - 4\theta + 2) y = 0$

உதவிச் சமன்பாடு $m^2 - 4m + 2 = 0$

$$m = 2 \pm \sqrt{2}$$

$$\therefore \text{ தீர்வு } y = e^{2z}\left( A \cosh \sqrt{2} z + B \sinh \sqrt{2} z \right)$$

$$= u^2 \left[ A \cosh (\sqrt{2} \log u) + B \sinh (\sqrt{2} \log u) \right]$$

$$= (5 + 2x)^2 \left[ A \cosh (\sqrt{2} \log \overline{5 + 2x}) + B \sinh (\sqrt{2} \log \overline{5 + 2x}) \right]$$

குறிப்பு.—பொதுவாக

$$(a + bx)^n \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 (a + bx)^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + P_n y = F(x)$$

என்ற சமன்பாட்டின் தீர்வு காண, $z = a + bx$ என ஈடு செய்து,

$$z^n \frac{d^n y}{dz^n} + \frac{P_1}{b} z^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dz^{n-1}} + \ldots + \frac{P_n}{b^n} y = \frac{1}{b^n} F\left(\frac{z-a}{b}\right)$$

என மாற்றியமைத்துப் பின்னர் அதன் தீர்வு முன் கூறப்பட்ட முறைகளில் காணலாம்.

## பயிற்சிகள் 21.

தீர்வு காண்க :

1. $(x^3 D^3 - 4x^2 D^2 + 5x D - 2) y = 1.$

2. $(x^2 D^2 + 3x D + 1) y = 0.$

3. $(x^2 D^2 - 3x D + 4) y = x^4.$

4. $(x^2 D^2 + 4x D + 2) y = e^x.$

5. $(x + a)^2 \dfrac{d^2 y}{dx^2} - 4(x + a) \dfrac{dy}{dx} + 6y = x.$

6. $(x^2 D^2 + x D - 4) y = (\log x + 1)^2.$

7. $(2x^2 D^2 - 5x D + 5) y = \cos(2 \log x).$

8. $(x^2 D^2 + x D + 9) y = 3x^3 + \sin(3 \log x).$

9. $(x^2 D^2 - 2) y = x^2 + \dfrac{1}{x}.$

10. $(x^2 D^2 - 6) y = 50 x^3 \log x.$

$$\int \frac{x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}}{x} = \int \frac{x^{1/2}}{x} + \int \frac{x^{1/3}}{x} + \int \frac{x^{1/4}}{x}$$

$$= x^{-1/2}$$

# விடைகள்

## பயிற்சிகள் 1.

1. $3 \log x - 2x^2$

2. $\frac{2}{n+2} x^{\frac{n+2}{2}}$

3. $-\left[\frac{a}{(n-3)\, x^{n-3}} + \frac{b}{(n-2)\, x^{n-2}} + \frac{c}{(n-1)\, x^{n-1}}\right]$

4. $\frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} - \frac{3}{x^3}$

5. $\frac{1}{2}(x + \sin x)$

6. $\frac{1}{2}(x - \sin x)$ — $\frac{1}{2}(x - \cos x)$.

7. $\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}$

8. $2\sqrt{x} + 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[4]{x}$

9. $\frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} x^{3/2}$

10. $-\frac{a}{x} + b \log x$

## பயிற்சிகள் 2(a).

1. $\frac{(2+x)^4}{4}$; $\frac{2(ax+b)^{5/2}}{5a}$; $\frac{-(b-ax)^{n+1}}{(n+1)a}$

2. $\frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}$; $\frac{(3x+2)^5}{15}$; $\frac{-(2-3x)^{n+1}}{3(n+1)}$;

$\frac{2}{3}(x+a)^{3/2}$; $\frac{1}{7}(2x-a)^{7/2}$; $\frac{-2(4-3x)^{\frac{n+2}{2}}}{3(n+2)}$.

3. $-\frac{1}{2(x+7)^2}$; $\frac{1}{4(n-1)(1-4x)^{n-1}}$; $\frac{1}{24(3-4x)^6}$.

4. $2\sqrt{x+a}$; $-\frac{2}{b}\sqrt{a-bx}$; $\frac{q}{(q-p)a}\cdot\frac{1}{(b+ax)^{\frac{p-q}{q}}}$.

5. $\frac{1}{4}e^{4x+1}$; $-\frac{1}{3}e^{4-3x}$; $2e^{\frac{x}{2}}$; $\frac{a^{mx}}{m\log_e a}$

6. $-\frac{1}{4}\cos 4x$; $\frac{1}{2}\sin(2x+3)$; $-\frac{1}{2}\tan(1-2x)$;
$-\frac{1}{5}\cot 5x$; $\frac{1}{2}\sec 2x$; $-\operatorname{cosec} ax$.

7. $\frac{1}{2}(x-\frac{1}{4}\sin 4x)$; $\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2m}\sin 2mx\right)$;

$2(a-b)\tan\frac{x}{2}$.

8. $-\frac{1}{4a}\cos 2ax$; $\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(m+n)x}{(m+n)}+\frac{\sin(m-n)x}{(m-n)}\right]$

$-\left(\frac{1}{4}\cos 4x+\frac{1}{2}\cos 2x\right)$; $\left(\frac{1}{4}\cos 4x-\frac{1}{6}\sin 6x\right)$

9. $\frac{1}{12}\sin 3x+\frac{3}{4}\sin x$; $\frac{1}{12}\cos 3x-\frac{3}{4}\cos x$;

$\frac{1}{36}\sin 9x+\frac{1}{4}\sin 3x$; $\frac{1}{12m}\cos 3mx-\frac{3}{4m}\cos mx$.

10. $\frac{1}{24}\cos 6x-\frac{1}{16}\cos 4x-\frac{1}{8}\cos 2x$;

$\frac{1}{6}\sin 3x-\frac{1}{4}\sin x-\frac{1}{20}\cos 5x$;

$\frac{1}{192}\cos 6x-\frac{3}{64}\cos 2x$.

## பயிற்சிகள் 2 (*b*).

1. $\frac{1}{2}\sin^{-1}\left(2x\right)$ ; $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(\frac{3x}{2}\right)$ ;

$\frac{1}{b}\sin^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$.

2. $\frac{1}{3}\tan^{-1}\left(3x\right)$ ; $\frac{1}{10}\tan^{-1}\left(\frac{5x}{2}\right)$ ;

$\frac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\frac{bx}{a}\right)$.

3. $\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(ax+b\right)$ ; $-\frac{1}{a}\sin^{-1}\left(\frac{b-ax}{m}\right)$ ;

$\frac{1}{a}\tan^{-1}\left(ax+b\right)$ ; $-\frac{1}{am}\tan^{-1}\left(\frac{b-ax}{m}\right)$ ;

$\frac{1}{a}\sin h^{-1}\left(ax+b\right)$ ; $\frac{1}{a}\cos h^{-1}\left(ax+b\right)$ ;

$\frac{1}{a}\sin h^{-1}\left(\frac{ax+b}{m}\right)$ ; $-\frac{1}{a}\cos h^{-1}\left(\frac{b-ax}{m}\right)$

$\frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{x}{3}\right)$.

4. $-\frac{1}{n}\cos\left(x^{n}\right)$.

5. $\frac{1}{3}\sin^{-1}\left(x^{3}\right)$.

6. $\frac{1}{2}\log\left(x^{2}+\sqrt{1+x^{4}}\right)$.

7. $2\sin\sqrt{x}$.

8. $\frac{1}{2a^{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x^{2}}{a^{2}}\right)$.

9. $\frac{1}{4}\log\left(x^{4}-9\right)+\frac{1}{12}\log\left(\frac{x^{2}-3}{x^{2}+3}\right)$.

10. $\log\left(x^{4}+x^{2}\right)$.

11. $\frac{1}{2}\log\sec 2x$.

12. $\frac{1}{m} \log \sin mx.$

13. $\frac{1}{2(1-x^2)}.$

14. $\frac{1}{1+\cos x}.$

15. $-\log(\cot^{-1} x).$

16. $-\frac{1}{2}(\cos^{-1} x)^2.$

17. $\frac{2(1+\sqrt{x})^{n+1}}{n+1}.$

18. $\frac{1}{2}\log(e^{2x}+1).$

19. $\frac{(e^{ax}+1)^{n+1}}{a(n+1)}.$

20. $\frac{\sec^{n-1} x}{(n-1)}.$

21. $\frac{1}{b}\log(a+b\sin x)$

22. $2\left[\frac{1}{3}x^{3/2}-\frac{1}{2}x+\sqrt{x}-\log(1+\sqrt{x})\right].$

23. $\frac{1}{12}\log(1+2x^6).$

24. $-\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{x}\right)^{n+1}.$

25. $-\cos(\log x).$

26. $-e^{\cot^{-1}x},$

27. $-\frac{1}{\sqrt{b}}\sinh^{-1}\left(u\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$. இங்கு $[u = . \cos x]$.

28. $\frac{\sin^5 x}{5}.$

29. $\frac{1}{6}\tan^3 2x.$

30. $-\frac{1}{6(3x^2+4x+2)^3}.$

31. $\dfrac{-1}{n(\sec x+\tan x)^n}$.

32. $\dfrac{\tan x+n\sec x}{(1-x^2)(\sec x+\tan x)^n}$.

33. $\tan^{-1}(e^x)$.

34. $\dfrac{1}{ab}\tan^{-1}\left(\dfrac{ae^x}{b}\right)$.

35. $-\dfrac{1}{\sinh x}$.

36. $-\dfrac{1}{(n-1)\cosh^{n-1}x}$.

37. $\dfrac{1}{1+\cot x}$.

38. $\tan(1+\log x)$.

39. $-\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

40. $e^{\sin^2 x}$.

41. $\frac{1}{2}e^{x^2}$.

42. $-2\cos\left(e^{\sqrt{x}}\right)$.

43. $-\dfrac{a^2}{2}\left[\cos^{-1}\left(\dfrac{x^2}{a^2}\right)-\dfrac{\sqrt{a^4-x^4}}{a^2}\right]$.

44. $-\frac{1}{3}\log(1+3\cos^2 x)$.

45. $\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{x^4}{(1+x^2)^2}$ அல்லது $-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{(1+2x^2)}{(1+x^2)^2}=$

$-\dfrac{1}{4}+\dfrac{x^4}{(1+x^2)^2}$; வேறுபாடு ஒரு மாறிலி மாத்திரமே.

## பயிற்சிகள் 3.

1. $x \tan x + \log \cos x$.
2. $-x \cot x + \log \sin x$.
3. $-x \cos x + \sin x$.
4. $\frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$.
5. $\frac{x^{n+1}}{n+1} \log x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$.
6. $\log x \,[\log (\log x) - 1]$.
7. $\frac{e^{2x}}{4} (2x^2 - 2x + 1)$.
8. $a^x \left[\frac{x}{\log a} - \frac{1}{(\log a)^2}\right]$.
9. $\frac{1}{2} e^{x^2} [x^2 - 1]$.
10. $\frac{\sin 2x}{8} - \frac{x \cos 2x}{4}$.
11. $x \log x - x$.
12. $x \sin^{-1} \left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2}$.
13. $x \tan^{-1} x - \log (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.
14. $x \cot^{-1} x + \log (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$.
15. $\frac{e^x}{x+2}$.
16. $\frac{e^x (x+1)}{(x+2)}$.
17. $\frac{e^x}{x+a}$.
18. $\frac{2x^2 - 1}{4} \sin^{-1} x + \frac{x}{4} \sqrt{1 - x^2}$.
19. $\frac{x^2}{2} \cot^{-1} x + \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \cot^{-1} x$.

20. $x(\log x)^2 - 2x(\log x - 1)$.

22. $\dfrac{2\pi}{3}$.

23. 1.

24. $\dfrac{7}{9}$.

25. $x \tan^{-1} x - \log(1 + x^2)^{1/2} - \frac{1}{2}(\tan^{-1} x)^2$.

26. $\frac{1}{2}\left[(x+1)\sqrt{8-2x-x^2} + 9 \sin^{-1}\left(\dfrac{x+1}{3}\right)\right]$

27. $\dfrac{1}{8}(4x+3)\sqrt{2x^2+3x-4} - \dfrac{41\sqrt{2}}{32}$
$\log\left(x+\frac{3}{4} + \sqrt{x^2+\dfrac{3}{2}x-2}\right)$;

28. $\dfrac{1}{2}\Big[(x+4)\sqrt{x^2+8x+25} + 9$
$\log\left\{(x+4) + \sqrt{x^2+8x+25}\right\}\Big]$.

29. $\dfrac{e^{3x}}{25}(3\cos 4x + 4\sin 4x)$.

30. $e^{x}\left[\frac{1}{2} + \dfrac{2\sin 2x + \cos 2x}{10}\right]$.

31. $\dfrac{a^{x}}{1+(\log a)^2}\left[\log a \,.\, \sin x - \cos x\right]$.

32. $\dfrac{e^{-3x}}{13}\left[2\sin(2x-3) - 3\cos(2x-3)\right]$.

33. $e^{2x}\left[\dfrac{\sin 8x - 4\cos 8x}{68} + \dfrac{\cos 2x - \sin 2x}{8}\right]$.

34. $e^{3x}\left[\dfrac{3\cos 5x + 5\sin 5x}{68} + \dfrac{\cos 3x + \sin 3x}{12}\right]$.

35. $e^{3x}\left[\dfrac{x}{13}(3\cos 2x + 2\sin 2x) - \dfrac{5\cos 2x + 12\sin 2x}{169}\right]$

36. $(x^2+x+1)^{3/2} - \frac{7(2x+1)}{8}(x^2+x+1)^{1/2} - \frac{21}{16}$
$\sinh^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

37. $\frac{1}{3}(x^2+2ax+b)^{3/2}$.

38. $\frac{1}{3}(ax^2-2bx+c)^{3/2}$.

39. $\frac{1}{3}(x^2+ax)^{3/2} - \frac{a}{4}\left[\left(x+\frac{a}{2}\right)\sqrt{x^2+ax} - \frac{a^2}{4}\right.$
$\left.\log\left(x+\frac{a}{2}+\sqrt{x^2+ax}\right)\right]$.

40. $\frac{1}{3}(3-2x-x^2)^{3/2} - \frac{1}{2}\left[(x-1)\sqrt{1-2x-x^2}+4\right.$
$\left.\sin^{-1}\left(\frac{x-1}{2}\right)\right]$.

## பயிற்சிகள் 4($a$).

1. $\frac{1}{6}\log\left(\frac{x-3}{x+3}\right)$.

2. $\frac{1}{12}\log\left(\frac{3+2x}{3-2x}\right)$.

3. $\frac{1}{4}\log\left(\frac{x+1}{x+5}\right)$.

4. $\frac{1}{8}\log\left(\frac{1+2x}{3-2x}\right)$.

5. $\log\left(\frac{x-3}{x-2}\right)$.

6. $\log\left(\frac{3x-1}{2x+1}\right)$.

7. $\frac{5}{3}\log(x-1) - \frac{3}{2}\log x - \frac{1}{6}\log(x+2)$.

8. $\log\left(\frac{x^2-a^2}{x^2-b^2}\right)$.

9. $\frac{31}{25}\log(x-3)+\frac{44}{25}\log(x+2)+\frac{16}{5(x+2)}$.

10. $\frac{1}{2}x+\frac{1}{15}\log(x-1)-\frac{8}{3}\log(x+2)+\frac{27}{20}$
$\log(2x+3)$].

11. $\sum\frac{a}{(a-b)(a-c)}\log(x-a)$.

12. $x+\sum\left(\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{(p-q)(p-r)}\log(x-a)\right)$

13. $\frac{2}{9}\log\left(\frac{x-1}{x+2}\right)-\frac{1}{3(x-1)}$.

14. $\frac{5}{27}\log\left(\frac{x-2}{x+1}\right)+\frac{1}{3(x+1)^2}-\frac{4}{9(x+1)}$.

15. $4\log(x-2)-3\log(x-1)-\frac{2}{x-2}-\frac{5}{(x-2)^2}$

### பயிற்சிகள் 4 *(b)*.

1. $\frac{1}{\sqrt{2}}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. $\log(x^2+2x+5)+\frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$.

3. $\frac{3}{4}\log(2x^2+x+3)+\frac{1}{2\sqrt{23}}\tan^{-1}\left(\frac{4x+1}{\sqrt{23}}\right)$.

4. $\frac{1}{8\sqrt{5}}\log\left(\frac{\sqrt{5}-1+x^4}{\sqrt{5}+1-x^4}\right)$.

5. $-x+\log(1-x-x^2)-2\sqrt{3}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

6. $\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log\left(x^2+x+1\right)$.
$-\frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)$.

7. $\cosh^{-1}(2x-3)$.

8. $\sqrt{x^2 + x + 1} - \frac{1}{2} \sinh^{-1} \left( \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right)$.

9. $\frac{1}{2} \sqrt{2x^2 + x - 3} - \frac{3}{4\sqrt{2}} \cosh^{-1} \left( \frac{4x + 1}{5} \right)$.

10. $\sin^{-1} \left( \frac{2x - 3}{\sqrt{41}} \right)$.

11. $- 2 \sin^{-1} \left( \sqrt{\frac{b - x}{b - a}} \right)$.

12. $\sin^{-1} \left( \frac{2x - a + b}{a + b} \right)$.

13. $\frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + 5x + 6} + \frac{7}{8} \log \left( x + \frac{5}{8} + \sqrt{x^2 + \frac{5}{4}x + \frac{3}{2}} \right)$.

14. $4 \sqrt{x^2 - 2x + 4} + 3 \log \left( x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 4} \right)$.

15. $\frac{1}{16} (4x - 5) \sqrt{2x^2 - x + 2} - \frac{11}{64} \sqrt{2}$

$$\log \left( x - \tfrac{1}{4} + \sqrt{x^2 - \tfrac{1}{2}x + 1} \right).$$

16. $\left( \frac{1}{4} x^3 - \frac{7}{24} x^2 - \frac{1}{96} x + \frac{115}{192} \right) \sqrt{x^2 + x + 1}$

$$- \frac{111}{384} \sinh^{-1} \left( \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right).$$

17. $\frac{1}{4} (2x + 5) \sqrt{x^2 + x + 1} + \frac{15}{8} \sinh^{-1} \left( \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} \right)$

## பயிற்சிகள் 4 (*c*).

1. $2 (\sqrt{x} - \tan^{-1} \sqrt{x})$

2. $\frac{2}{15} \sqrt{x + 5} (3x^2 - 20x + 200) + 2 (x + 5)^{\frac{1}{2}}$.

3. $\frac{2}{35} \sqrt{x - 1} \left( 5x^3 + 6x^2 + 8x + 16 \right)$.

4. $\frac{1}{3} \log [\sqrt{1 + x^3} - 1] - \frac{1}{3} \log [\sqrt{1 + x^3} + 1]$.

5. $2\sqrt{x+2} - 4\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x+2}}{2}\right)$.

6. $x - 2\sqrt{x+2}\log(1+\sqrt{x})$.

7. $\log\left(\frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}\right)$.

8. $\frac{1}{\sqrt{14}}\log\left[\frac{\sqrt{2(x+5)}-\sqrt{7}}{\sqrt{2(x+5)}+\sqrt{7}}\right]$.

9. $-6\left[\frac{\sqrt{x+a}}{3} + \frac{(x+a)^{\frac{1}{3}}}{2} + (x+a)^{\frac{1}{6}} + \log\left\{(x+a)^{\frac{1}{6}} - 1\right\}\right]$.

10. $6\sqrt[6]{x} + 6\log\left[\frac{\sqrt[6]{x}}{(\sqrt[6]{x}+1)^2}\right]$.

## பயிற்சிகள் 4(*d*).

1. $-\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$.

2. $-\left(\frac{x+1}{\sqrt{1-x^2}}\right)$.

3. $\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$.

4. $-\frac{1}{\sqrt{2}}\sinh^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

5. $-\frac{1}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$.

6. $\frac{1}{\sqrt{11}}\sinh^{-1}\left(\frac{3+5x}{\sqrt{2}(1-2x)}\right)$

7. $\frac{1}{3}(1+x)^{\frac{1}{2}}(2-x)(1-x)^{-\frac{3}{2}}$.

8. $-\frac{1}{\sqrt{7}}\cosh^{-1}\left(\frac{3x+8}{4x+6}\right)$.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \sin^{-1}\left(\dfrac{x\sqrt{2}}{1+x}\right)$.

10. $\dfrac{1}{\sqrt{a}} \log\left(\dfrac{x}{a+bx+\sqrt{a}\sqrt{a+2bx+cx^2}}\right)$.

11. $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \cot^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x\sqrt{2}}\right)$.

12. $\frac{1}{4}\log(2+\sqrt{3})$.

13. $\frac{1}{2}\log(2+\sqrt{3})$.

14. $\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left[\sinh^{-1}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)+\sinh^{-1}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)\right]$.

15. $\sin^{-1}\left(\dfrac{x+3}{\sqrt{5}\,(x+1)}\right)+\cos^{-1}\left(\dfrac{2-x}{x\sqrt{5}}\right)$.

### பயிற்சிகள் 4(e).

1. $\dfrac{1}{3}\log\left\{\dfrac{\tan\frac{x}{2}+3}{3-\tan\frac{x}{2}}\right\}$.

2. $\dfrac{2}{5}\tan^{-1}\left\{\dfrac{\tan\frac{x}{2}}{5}\right\}$.

3. $\dfrac{1}{3}\log\left\{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}+1}{2\tan\frac{x}{2}+4}\right\}$.

4. $-\dfrac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}$.

5. $\dfrac{1}{\sqrt{5}}\log\left\{\dfrac{2\tan\frac{x}{2}+3-\sqrt{5}}{2\tan\frac{x}{2}+3+\sqrt{5}}\right\}$.

6. $\dfrac{1}{2\sqrt{6}} \log \left\{ \dfrac{\sqrt{3}\left(\tan \dfrac{x}{2} - 1\right) + 2\sqrt{2}}{\sqrt{3}\left(1 - \tan \dfrac{x}{2}\right) + 2\sqrt{2}} \right\}$.

7. $\dfrac{x}{2} + \dfrac{1}{2} \log ( \cos x + \sin x )$.

8. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2} \log ( \cos x + \sin x )$.

9. $\dfrac{1}{\sqrt{7}} \tan^{-1} \left( \dfrac{4 \tan x + \sqrt{3}}{\sqrt{7}} \right)$.

10. $\dfrac{1}{6m} \tan^{-1} \left\{ \dfrac{2 \tan \dfrac{mx}{2}}{3} \right\}$.

11. $\dfrac{2x}{3} + \dfrac{1}{6\sqrt{2}} \log \left\{ \dfrac{\tan \dfrac{x}{2} + 3 - 2\sqrt{2}}{\tan \dfrac{x}{2} + 3 + 2\sqrt{2}} \right\}$.

12. $\dfrac{x}{2} - \dfrac{5}{2} \log (\cos x - \sin x)$.

13. $\dfrac{-x}{13} - \dfrac{5}{13} \log (2 \cos x - 3 \sin x)$.

14. $\dfrac{1}{20} \log \left( \dfrac{1 + 2 \tan 2x}{4 - 2 \tan 2x} \right)$.

15. $\dfrac{a}{\sin a}$.

## பயிற்சிகள் 5 ($a$).

1. $-\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x$.

2. $\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x$.

3. $\frac{1}{2} \tan^2 x + \log \cos x$.

4. $+ \log \sin x - \dfrac{\cot^4 x}{4} + \dfrac{\cot^2 x}{2}$

5. $\dfrac{\tan x \sec^2 x}{3} + \frac{2}{3} \tan x.$

6. $\dfrac{-\cot x \operatorname{cosec}^4 x}{5} - \dfrac{4}{15} \cot x \operatorname{cosec}^2 x - \dfrac{8}{15} \cot x.$

7. $\dfrac{\sec^7 x}{7} - \dfrac{\sec^5 x}{5}.$

8. $2 \log \tan x + \dfrac{(\tan^2 x - \cot^2 x)}{2}.$

9. $\dfrac{-\cot^9 x}{9} - \dfrac{\cot^{11} x}{11}.$

பயிற்சிகள் 5 (*b*).

2. $-x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6(x \cos x - \sin x).$

4. $a(n+2) I_n = x^{n-1}(ax^2+bx+c)^{3/2} - b(n+\frac{1}{2}) I_{n-1}$
$- c(n-1) I_{n-2}.$

7. $I_n (1+n^2) = 1 + n(n-1) I_{n-2}.$

8. $\dfrac{\pi a^3}{2}.$

9. $-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \log e^2.$

பயிற்சிகள் 6.

1. $\dfrac{b^2 - a^2}{2}.$

2. $(e^b - e^a).$

3. $\cos a - \cos b.$

4. $\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}.$

5. $\log_e 2.$

6. $\frac{3}{8}.$

7. $\dfrac{\pi}{2}.$

8. $\frac{1}{3} \log_e 2.$

9. $\log_e 3.$

## பயிற்சிகள் 8.

1. 1.

2. $\frac{\pi}{2}$.

3. இல்லை.

4. $\frac{4}{3}$.

5. இல்லை.

## பயிற்சிகள் 9.

1. (i) $\frac{16\sqrt{2}}{3}a^2$; (ii) $\frac{c^2}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$ (iii) 2.

2. $\frac{\pi a^2}{2}$.

3. (i) $\frac{8a^2}{15}$; (ii) $\frac{32}{105}\frac{b^3}{a}\sqrt{\frac{b}{a}}$; (iii) $\pi a^2$;

   (iv) $\frac{4}{3}a^2$.

4. $\frac{9}{32}$.

5. $4a^2$.

6. $\frac{3\pi a^2}{4}$.

7. (i) $\frac{16a^2}{3}$; (ii) $\left(\frac{5}{4}\right)\sqrt[3]{27}$; (iii) $a^2\left(4\pi-\frac{32}{3}\right)$;

   (iv) $4c^2\sqrt{2}\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; (v) $\frac{8(a+b)\sqrt{ab}}{3}$.

8. $3\pi a^2$.

9. $\frac{3\pi a^2}{8}$.

10. $\frac{2}{3}$.

## பயிற்சிகள் 10.

1. $\frac{3}{2}\pi a^2$.
2. $\pi a^2$.
3. $\frac{8a^2}{3}$.
4. $\frac{a^2\left(e^{2m\beta} - e^{2m\alpha}\right)}{4m}$.
5. $\frac{1}{96}\pi a^2(\pi^2 - 6)$.
6. $11\pi$.
7. $\frac{\pi a^2}{4n}$.
8. $2a^2\left(1 - \frac{\pi}{4}\right)$.
9. $\frac{1}{4}\pi a^2$.
10. $\frac{\pi}{2}(2a^2 + b^2)$.

## பயிற்சிகள் 11.

1. $\frac{a}{27}\left[13\sqrt{13} - 8\right]$.
2. $8a$.
3. $\frac{a}{2}\int_0^{a/2}\sqrt{\frac{4a - 3x}{(a - x)^3}}\,dx$.
4. $\frac{4a}{\sqrt{3}}$.
5. $8a$.
6. $\pi a$.
7. $\left[a(3\ \ \sec^4\theta)^{1/2} - a\sqrt{3}\log(1 + 3\cos^2\theta)^{1/2} + a\sqrt{3}\cos\theta\right]_{\theta_1}^{\theta_2}$.
8. $c\sinh\frac{x}{c}$.
9. $4\sqrt{3}\,a$.
10. $4\left(\frac{a^3 + b^3}{ab}\right)$.

## பயிற்சிகள் 12.

1. கோளம், அரைவிட்டம் $a$ : $\frac{4}{3}\pi a^3$

கூம்பு : $a$ அரைவிட்டம், $h$ உயரம் ; $\frac{1}{3}\pi a^2 h$ ,

2. $2\pi a^3$.

4. (i) $\frac{\pi a^3}{12}$.

(ii) $\frac{2}{15}\pi$.

(iii) $2\pi a^3 (\log_e 2 - \frac{2}{3})$.

5. $\frac{\pi a^3}{15}$.

6. $\frac{\pi^2}{2}$.

7. (i) $\frac{7\pi}{24} a^3$; (ii) $\frac{\pi}{3} a^3$.

10. (i) $5\pi^2 a^3$; (ii) $\frac{2\pi a^3}{3}$; (iii) $\frac{16\pi\sqrt{3}}{35}$;

(iv) $\pi a^3 (8 \log_e 2 - 3)$.

11. $\frac{8}{3}\pi a^3$.

12. (i) $\frac{1}{2}\pi a^3 \left[\frac{3}{\sqrt{2}} \log (1+\sqrt{2}) - 1\right]$

(ii) $\frac{\pi^2 a^3}{4\sqrt{2}}$.

14. $\frac{4}{3}\pi ab^2$.

16. $\frac{5\pi}{28}$.

## பயிற்சிகள் 13.

1. (i) $\frac{1}{3}\pi a^2$ ; (ii) $\frac{8\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$ ; (iii) $2\pi b\left(\frac{a}{e}\sin^{-1}e + b\right)$;

(iv) $\frac{\pi c^2}{2}(1+\sinh 2)$ ; (v) $\frac{64\pi a^2}{3}$ ; (vi) $\frac{12\pi a^2}{5}$.

2. (i) $\frac{93\pi}{5}$ ; (ii) $\pi a^2 (2 - \sqrt{2})$ ; (iii) 233·7 (குற்றுமதிப்பு).

3. $2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \log\left(\frac{1+e}{1-e}\right)$.

4. (i) $2\pi a^2$ ; (ii) $8\pi a^2 \left(\pi - \frac{4}{3}\right)$ ; $\frac{32\pi a^2}{3}$ ; (iii) $\frac{48\pi a^2\sqrt{2}}{5}$;

(iv) $\pi a^2 [3\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})]$.

**பயிற்சிகள் 14.**

1. (i) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{256\, a}{315\pi}$.

(ii) $\bar{x} = \bar{y} = \frac{9}{5}$.

(iii) $\bar{x} = \frac{a(3\pi - 8)}{3(4 - \pi)}$ ; $\bar{y} = 0$.

(iv) $\left(\frac{5a}{6}, 0\right)$.

(v) $\left(\frac{128a\sqrt{2}}{105\pi}, 0\right)$.

(vi) $\left(\frac{a}{5}, \frac{a}{5}\right)$.

(vii) $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{8}\right)$.

(viii) $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{7}\right)$.

2. (i) $\left(\frac{3a}{8}, 0\right)$; (ii) $\left(\frac{4 + \pi^2}{4\pi}, 0\right)$;

(iii) $\left(\frac{5a}{2\pi}, 0\right)$; (iv) $\left(\frac{4a}{5}, 0\right)$.

3. (i) $\left(\frac{6\sqrt{3} + 1}{5(3\sqrt{3} - 1)}, 0\right)$.

(ii) $\left(\frac{50a}{63}, 0\right)$.

(iii) $\left[0, \frac{2a(15\pi - 8)}{15(3\pi - 4)}\right]$.

4. மையத்திலிருந்து மைய அரைவிட்டத்தின் மேல் $\frac{3a\pi}{16}$ தூரம்.

5. அச்சின்மேல் உச்சியிலிருந்து $\frac{3h}{4}$ தூரம்.

## பயிற்சிகள் 15.

1. $\frac{2}{5} M b^2$.

2. $\frac{4}{3} M ah$.

3. (i) $\frac{3 M a^2}{2}$ ; (ii) $2 M a^2$.

4. $\frac{1}{2} M (R^2 + r^2)$.

5. $\frac{1}{2} M a^2$ (பக்கம் $= 2a$).

9. (i) $\frac{2}{3} M a^2$ ; (ii) $\frac{M a^2}{12}$.

10. (i) $M\left(\frac{a^2 + b^2}{4}\right)$ ; (ii) $M\left(\frac{a^2 + b^2}{2}\right)$.

11. $\frac{3 M (a^5 - b^5)}{10 (a^3 - b^3)}$.

12. $\frac{M a^2}{24}$.

## பயிற்சிகள் 16.

1. $\pi a^2 h$ ; $2\pi ah$.

## பயிற்சிகள் 17.

1. (a) $y = x \frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\frac{dy}{dx}\right)^3$.

(b) $\frac{d^2y}{dx^2} + m^2 y = 0$.

(c) $8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 27y$.

2. $2a\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0.$

3. $\left(y - x\frac{dy}{dx}\right)^2 = 2xy\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right].$

### பயிற்சிகள் 18 (*a*).

1. $3x^4 + 4(y+1)^3 = C.$

2. $x^4 y^3 = ce^y$

3. $(x+1)^2 + (y+1)^2 + 2\log(x-1)(y-1) = C.$

4. $y = C(1-ay)(x+a).$

5. $\tan^{-1}(x) = \tan^{-1}(y) + C$ அல்லது $y - x = C(1+xy).$

6. $y\sin y = \frac{x^2}{4}(2\log x + 1) + C.$

7. $(\sin^{-1}x)^2 + \log\cos^2 y = C.$

8. $(y+1)(1+e^{-x}) = ce^y.$

9. $\tan x\tan y = C.$

10. $y\sin^{-1}x = C.$

### பயிற்சிகள் 18 (*b*).

1. (a) $e^x + 1 = A\cos y$ ; $(1+e^x) = 2\sqrt{2}\cos y.$

(b) $\log[x(1-y)^2] = \frac{x^2-(y+1)^2}{2}.$

(c) $y\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}.$

2. $x^2 - y^2 + 7 = 0.$

3. $Kv = g\cos\alpha(1-e^{-kt}).$

### பயிற்சிகள் 18 (*c*).

1. $Cx - \sqrt{x^2+y^2} = x\log(\sqrt{x^2+y^2} - x).$

$2y = x(x+y).$

3. $xy(x-y) = C.$

4. $x^2 = c \sinh^3 \left(\frac{y}{x}\right)$.

5. $x \sin\left(\frac{y}{x}\right) = c$.

6. $x^4 + 4xy^3 - y^4 = c$.

7. $4 \log\left(\frac{y^2}{x}\right) + \frac{x^4}{y^4} = c$

8. $y^3 = ce^{\frac{x^3}{y^3}}$

9. $\frac{2xy}{(x+y)^2} + \log(x+y) = c$.

10. $y = ce^{y/x}$.

## பயிற்சிகள் 18 (*d*).

1. $3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 6y + c = 0$.
2. $(y - x + 3)^4 = c(y + 2x - 3)$.
3. $(3x-1)^2 - (3x-1)(3y-5) + (3y-5)^2 = c$.
4. $(x + 2y - 4) = c(2x - y - 3)^2$.
5. $1 + y = c(1 + x)$.
6. $(x - 4)^2 (1 + 2y) = c$.
7. $\log\left(15x + 10y - 1\right) + \frac{5}{2}\left(x - y\right) = c$.
8. $\frac{2}{7}\left(2x + 3y\right) - \frac{9}{49}\log\left(14x + 21y + 22\right) = x + c$.
9. $\tan^{-1}\left(\frac{2y+1}{2x+1}\right) = \log c\sqrt{(x^2 + y^2 + x + y + \frac{1}{2}}$
10. $3x + 3y + 4 = ce^{3(x-2y)}$.

## பயிற்சிகள் 18 (*e*).

1. $2x^2y^2 \log y - 2xy - 1 = cx^2y^2$.
2. $\log x = xy - \frac{1}{2}x^2y^2 + c$.
3. $y = cx^2e^{-1/xy}$.

4. $(x^2 - y^2 - 1)^5 = c\,(x^2 + y^2 - 3)$.

5. $x + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x+y}{2}\right) = c$.

6. $x + c = \tan\left(\frac{x+y}{2}\right)$.

## பயிற்சிகள் 19 (*a*).

1. $x^3 - 6\,x^2y - 6\,xy^2 + y^3 = c$.
2. $ax^2 + 2\,hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.
3. $(e^y + 1)\sin x = c$.
4. $y^4 + 2a^2\,y^2 + x^4 - 2a^2\,x^2 + 2x^2\,y^2 = c$.
5. $n = -2\,;\; y^2 = c\,x^2$.
6. $\log\,(x^2 + y^2) + \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = c$.
7. $x = cy^2\; e^{\frac{1}{x^2y^2}}$.
8. $(x^2 + y^2)\; e^{\;2y4} = c$.
9. $e^{\,x^2y} + e^{\,xy^2} + x - y^2 = c$.

## பயிற்சிகள் 19 (*b*).

1. $y = x^2\,(1 + ce^{\,1/x})$.
2. $y = ce^{\frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.
3. $x^n\,y = ax + c$
4. $y\,(x^2 + 1)^2 = \tan^{-1} x + c$.
5. $y = \tan x - 1 + Ae^{-\tan x}$.
6. $y = 2\,(e^{-\sin x} + \sin x - 1)$.
7. $y^3\,[e^x\,(x - 1) + A] = x^2$.
8. $3\sqrt{1 + x^2} = y^5\,[(1 + x^2)^{3/2} + A]$.

9. $3\,xe^{2y} = A\,(y+1)^3 - 1.$

10. $y\,(1+ax) = a + cx.$

11. $x = y - a^2 + ce^{\frac{-y}{a^2}}.$

12. $(x - 2y^3)\,y^2 = c.$

### பயிற்சிகள் 19(c).

1. $(y - c)\,(y - x - c)\,(2y - x^2 - c)\,(y - ce^{2x}) = 0.$

2. $(y - cx^2)\left(y - \frac{c}{x^3}\right) = 0.$

3. $xy = c\,(3cx - 1).$

4. $y^3 - 3\,cx - c^2 = 0.$

5. $y\,(1 \pm \cos x) = c.$

6. $(y - x + c)\,(xy + c) = 0.$

7. $(y - x + 1 - ce^{x})\,(2y + x^2 - c) = 0.$

8. $(2\,xy + x^2 - c)\,(x^2 + y^2 - c) = 0.$

9. $(y - c^2)^2 = 4\,cx.$

10. $x = \frac{-p}{\sqrt{p^2-1}}\log\left(p + \sqrt{p^2+1}\right) + \frac{cp}{\sqrt{p^2-1}}.$

$y = -p - \frac{1}{\sqrt{p^2-1}}\log\left(p + \sqrt{p^2-1}\right) + \frac{c}{\sqrt{p^2-1}}$

11. $\sin y = c\sin x + c^2.$

12. $y = cx - c^2.$

13. $x = c\,(p+1)\,e^{p}\,;\; y = cp^2\,e^{p}.$

14. $3x = 2p + \frac{c}{\sqrt{p}}\,; \quad 3y = p^2 - c\sqrt{p}.$

15. $x = 2\log p + \log\left(p + \sqrt{1+p^2}\right) + c\,;$

$y = 2p + \sqrt{1+p^2}.$

16. $(2x - b)\,c = y^2 - ac^2.$

17. $\log y = cx + c^2.$

18. $x = \frac{(\log p - p + c)}{(p-1)^2}\,; \quad y = xp^2 + p.$

19. $(y - cx)(c - 1) = c.$

20. $y(1 - p^2)^{1/2} + (1 - p^2)^{3/2} = c$; கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டோடு.

21. $(y - xc)^2 = a^2(1 + c^2).$

22. $xp^{\frac{a}{a-1}} = c\left(\frac{-3bp}{(3a-2)}\right)^{\left(\frac{3a-2}{a-1}\right)}$; கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டோடு.

23. $c^2y^2 + 4cx = 4.$

24. $y = 4c(cxy + 1).$

25. $(c - y)(1 + p^2) = 1$; கொடுக்கப்பட்ட சமன்பாட்டோடு.

## பயிற்சிகள் 20 ($a$).

1. $y = Ae^{x} + Be^{-x}.$
2. $y = Ae^{-2x} + Be^{-x}.$
3. $y = A + Be^{-x}.$
4. $y = (A + Bx)e^{-x}.$
5. $y = Ae^{-x} + B\cos x + C\sin x.$
6. $y = A + Bx + Cx^2 + De^{-x}.$
7. $y = Ae^{-x} + Be^{\frac{7x}{2}}.$
8. $y = Ae^{x} + Be^{-x} + C\cos x + D\sin x.$
9. $y = Ae^{2x} + e^{-x}(B\cos\sqrt{3}x + C\sin\sqrt{3}x).$
10. $y = A\cos 2mx + B\sin 2mx.$

## பயிற்சிகள் 20 ($b$).

1. $y = Ae^{-4x} + Be^{x} - \frac{e^{2x}}{6}.$
2. $y = Ae^{x} + Be^{2x} + \frac{1}{12}e^{5x}.$

3. $y = (A + Bx)\, e^{kx} + \dfrac{e^{x}}{(k-1)^2}$.

4. $y = \dfrac{17}{20} e^{6x} - \dfrac{3}{5} e^{x} - \dfrac{e^{2x}}{4}$.

5. $y = (A + 3x) \sinh 2x + B \cosh 2x$.

6. $y = A + B \cosh 3x + (C + 6x) \sinh 3x$.

7. $y = e^{2x} (A + Bx + 2x^2)$.

8. $y = A + Be^{-4x} + \dfrac{1}{64} e^{4x} + \frac{1}{8} e^{-2x}$

**பயிற்சிகள் 20 (c).**

1. $y = e^{-x} (A \cos 2x + B \sin 2x) + 5 \cos 2x + 20 \sin 2x$.

2. $y = e^{-2x} (A \cos 3x + B \sin 3x) + 2 \cos 3x + 6 \sin 3x$.

3. (i) $x = e^{-kt} (A \cos wt + B \sin wt) + \dfrac{1}{2kp} \sin pt$.

$(w^2 = p^2 - k^2;\ p > k)$.

(ii) $x = e^{-kt} (A + Bt) + \dfrac{\sin pt}{2p^2}$ ; $(k = p)$

(iii) $x = e^{-kt} (A \cosh wt + B \sinh wt)$ ; $w^2 = k^2 p^2$.

4. $y = e^{2x} (A \cosh \sqrt{3}x + B \sinh \sqrt{3x})$

$+ \dfrac{a}{73} (8 \cos 2x - 3 \sin 2x)$.

5. $y = A \sin (3x + B) + {}^{1/5} (\cos 2x + \sin 2x)$.

6. $y = A e^{2x} + B e^{-2x} - \dfrac{\cos 2x}{2}$.

7. $(n^2 - w^2)\, x = A \cos nt + B \sin nt + n^2 a \sin wt$.

8. $4x = 8 \sin 3t - \cos 3t + 2 \cos \left( \dfrac{\pi}{3} + t \right)$.

10. $y = A \cos 2ax + B \sin 2ax + \dfrac{x \sin 2ax}{4a}$

11. $y = A \cos 4x + B \sin 4x - \dfrac{x \cos 4x}{8}$.

12. $y = A \cos x + B \sin x - x \cos x + \dfrac{3}{2} x \sin x$.